

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Единый Государственный Экзамен

ГОТОВИМСЯ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Доченька,
не забудь сдать телефон и,
конечно, не вздумай
пользоваться шпаргалкой!

ВХОД
В ППЭ

Мама, не волнуйся!
Ведь я готовилась ко всем экзаменам
по пособиям Издательства
«Интеллект-Центр» и уверена
в своих знаниях!

#ЕГЭучебник2024



УДК 373.167.1:51(075.3)

ББК 22.1я721

П80

Рецензенты:

Т. Н. Казарихина – кандидат педагогических наук, заместитель директора по НМР,
АНО СОШ «Димитриевская», доцент МПГУ;

Е. В. Лукьянова – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа МПГУ,
учитель высшей категории

Прокофьев, А. А.

П80 Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации / А. А. Прокофьев, Т. В. Соколова. — Эл. изд. — 1 файл pdf : 251 с. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2024. — (Единый государственный экзамен). — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-907750-00-5

Данное пособие предназначено для подготовки учащихся к сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня и включает в себя наборы типовых заданий по всем содержательным линиям экзаменационной работы в соответствии с представленной на сайте ФИПИ демонстрационной версией ЕГЭ 2024 года по математике профильного уровня. Книга также содержит 20 практических работ, которые будут полезны учителям для контроля усвоения учащимися изучаемого материала, 30 тренировочных вариантов в формате ЕГЭ–2024 и методические указания по оформлению решения заданий второй части варианта (задания с развернутым ответом). При составлении пособия были использованы аналоги заданий Открытого банка заданий ФИПИ, а также многолетний опыт работы авторов в экспертных комиссиях по проверке экзаменационных работ и в качестве преподавателей математики в школе и университете.

Пособие может быть использовано как учителями математики и репетиторами при подборе заданий для занятий по подготовке к экзамену, так и самими обучающимися для отработки навыков решения заданий ЕГЭ по математике профильного уровня. Также пособие будет полезным любому читателю, желающему укрепить свои знания по той или иной теме школьного курса математики.

УДК 373.167.1:51(075.3)

ББК 22.1я721

Электронное издание на основе печатного издания: Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации / А. А. Прокофьев, Т. В. Соколова. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2024. — 248 с. — (Единый государственный экзамен). — ISBN 978-5-907651-56-2. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-907750-00-5

© ООО «Издательство «Интеллект-Центр», 2024

© А. А. Прокофьев, Т. В. Соколова, 2023

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ГЛАВА 1. АЛГЕБРА	7
§ 1. Рациональные уравнения и выражения	7
Проверочная работа № 1	12
§ 2. Иррациональные выражения и уравнения	14
Проверочная работа № 2	16
§ 3. Степенные выражения и уравнения	18
Проверочная работа № 3	20
§ 4. Логарифмические выражения и уравнения	22
Проверочная работа № 4	23
Проверочная работа № 5	25
§ 5. Простейшие неравенства	26
§ 6. Тригонометрические выражения и уравнения	27
Проверочная работа № 6	29
Проверочная работа № 7	31
§ 7. Текстовые задачи (движение, работа, скорость, растворы, проценты)	32
Задачи на движение по прямой	32
Задачи на движение по замкнутой трассе	33
Задачи на движение протяжённых тел	33
Задачи на движение по воде	34
Задачи на среднюю скорость	35
Задачи на работу	35
Задачи на проценты	36
Проверочная работа № 8	37
ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	38
§ 1. Вероятность случайного события	38
Проверочная работа № 9	43
§ 2. Вероятности сложных событий	44
Проверочная работа № 10	48
ГЛАВА 3. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	49
§ 1. Функции и графики	49
Проверочная работа № 11	53
§ 2. Производная функции и её применение	54
Геометрический и физический смысл производной	54
Проверочная работа № 12	58
Техника дифференцирования	60
Проверочная работа № 13	62
Исследование функций	63
Проверочная работа № 14	70
§ 3. Первообразная	71
Проверочная работа № 15	75
ГЛАВА 4. ГЕОМЕТРИЯ	77
§ 1. Планиметрия	77
Углы и длины	77
Проверочная работа № 16	82
Площади	83
Проверочная работа № 17	85
Окружность	86
Проверочная работа № 18	89
§ 2. Стереометрия	90
Многогранники	90
Круглые тела	95
Проверочная работа № 19	98

ГЛАВА 5. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ	99
§ 1. Уравнения	99
§ 2. Стереометрия	102
Опорные задачи на доказательство	102
Углы и расстояния	102
Сечение многогранника плоскостью	104
Объём многогранника	105
Круглые тела	106
§ 3. Неравенства и системы неравенств	108
§ 4. Планиметрия	110
Опорные задачи на доказательство	110
Вычислительные задачи (аналоги встречающихся на экзамене)	111
§ 5. Экономические задачи	116
§ 6. Уравнения и неравенства с параметром	119
§ 7. Задачи на целые числа	122
ГЛАВА 6. ВЕКТОРЫ	126
Проверочная работа № 20	129
Тренировочные варианты Единого государственного экзамена. Профильный уровень	130
Тренировочный вариант № 1	130
Тренировочный вариант № 2	133
Тренировочный вариант № 3	136
Тренировочный вариант № 4	139
Тренировочный вариант № 5	142
Тренировочный вариант № 6	145
Тренировочный вариант № 7	148
Тренировочный вариант № 8	151
Тренировочный вариант № 9	154
Тренировочный вариант № 10	157
Тренировочный вариант № 11	160
Тренировочный вариант № 12	163
Тренировочный вариант № 13	166
Тренировочный вариант № 14	169
Тренировочный вариант № 15	172
Тренировочный вариант № 16	175
Тренировочный вариант № 17	178
Тренировочный вариант № 18	181
Тренировочный вариант № 19	184
Тренировочный вариант № 20	187
Тренировочный вариант № 21	190
Тренировочный вариант № 22	193
Тренировочный вариант № 23	196
Тренировочный вариант № 24	199
Тренировочный вариант № 25	202
Тренировочный вариант № 26	205
Тренировочный вариант № 27	208
Тренировочный вариант № 28	211
Тренировочный вариант № 29	214
Тренировочный вариант № 30	217
Разбор некоторых заданий с развёрнутым ответом и указания к оформлению их решений	220
Ответы	235

ГЛАВА 1. АЛГЕБРА

§ 1. Рациональные уравнения и выражения

1. Найдите корень уравнения:

а) $3 - 7x = 31 - 3x$; б) $7(3 + 2x) = 11(15 - 2x)$; в) $\frac{5}{6}x = 53\frac{1}{3}$; г) $\frac{7}{15}x = -16\frac{4}{5}$.

2. Найдите корень уравнения:

а) $\frac{1}{5x-3} = 4$; б) $\frac{1}{2x-5} = \frac{5}{3}$; в) $\frac{2x-70}{x+40} = -3$; г) $\frac{1}{9x+2} = \frac{2}{73-5x}$.

3. а) Решите уравнение $\frac{8}{5}x^2 = 8,1$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

б) Решите уравнение $\frac{5}{7}x^2 = 4\frac{13}{28}$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

в) Решите уравнение $x^2 - 115x - 116 = 0$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

г) Решите уравнение $2x^2 + 2021x - 2023 = 0$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из них.

4. Найдите корень уравнения:

а) $(4x+1)^2 = (4x-5)^2$; б) $(2x+8)^2 = (3-2x)^2$.

5. Найдите корень уравнения:

а) $4x^2 - 7 = (2x-1)^2$; б) $9x^2 - 17 = (1+3x)^2$; в) $(2x+3)^2 = 24x$; г) $(4x-1)^2 = -16x$.

6. а) Решите уравнение $\frac{x+3}{x^2-2} = \frac{1}{2}$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

б) Решите уравнение $\frac{x-8}{x^2-9} = 2$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из них.

7. а) Решите уравнение $\frac{x-21}{x+11} = x$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из них.

б) Решите уравнение $\frac{7x-15}{x+9} = 2x$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

в) Решите уравнение $\frac{9x+53}{x+2} = 3x-1$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

8. а) Решите уравнение $\frac{2x-5}{10x+3} = \frac{1}{x+3}$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из них.
- б) Решите уравнение $\frac{x-1}{2x+5} = \frac{2x-7}{3x-1}$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из них.
- в) Решите уравнение $\frac{x+2}{2x-3} = \frac{2x-5}{x+4}$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.
9. Найдите корень уравнения:
- а) $(x+7)^5 = 243$; б) $(8-x)^7 = -128$.
10. а) Решите уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.
- б) Решите уравнение $x^6 - 65x^3 + 64 = 0$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из них.
11. а) При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 21$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6,3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.
- б) При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 25$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 5,1 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.
12. а) Некоторая компания производит в месяц q единиц продукции, которую продает по цене $p = 300$ руб. за единицу, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 100$ руб., дополнительные расходы предприятия $f = 800\,000$ руб. в месяц. Месячная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная прибыль предприятия будет не менее 700 000 руб.
- б) Некоторая компания производит в месяц q единиц продукции, которую продаёт по цене по цене $p = 500$ руб. за единицу, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 150$ руб., дополнительные расходы предприятия $f = 700\,000$ руб. в месяц. Месячная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная прибыль предприятия будет не менее 2 170 000 руб.
13. а) Некоторая компания производит в месяц $q = 5\,000$ единиц продукции, которую продает по цене p руб. за единицу, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., дополнительные расходы предприятия $f = 550\,000$ руб. в месяц. Месячная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi = q(p - v) - f$. Определите наи-

меньшую цену p за единицу продукции, при которой месячная прибыль предприятия будет не менее 1 500 000 руб.

- б) Некоторая компания производит в месяц $q = 7000$ единиц продукции, которую продаёт по цене p руб. за единицу, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., дополнительные расходы предприятия $f = 500000$ руб. в месяц. Месячная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi = q(p - v) - f$. Определите наименьшую цену p за единицу продукции, при которой месячная прибыль предприятия будет не менее 2 440 000 руб.

14. а) Некоторое предприятие производит в месяц q единиц продукции. Затраты на производство одной единицы продукции (в рублях) зависят от объёма производства по формуле $z = z_0 \left(1 + \frac{1}{q}\right)$, где $z_0 = 300$. Общие затраты предприятия (в рублях) вычисляются по формуле $r = zq$. Определите наибольшее количество единиц продукции в месяц, при котором общие затраты предприятия не превышают 450 300 рублей.

- б) Некоторое предприятие производит в месяц q единиц продукции. Затраты на производство одной единицы продукции (в рублях) зависят от объёма производства по формуле $z = z_0 \left(1 + \frac{1}{q}\right)$, где $z_0 = 450$. Общие затраты предприятия (в рублях) вычисляются по формуле $r = zq$. Определите наибольшее количество единиц продукции в месяц, при котором общие затраты предприятия не превышают 900 450 рублей.

15. а) Для измерения высоты этажа в доме мальчик измеряет время t падения небольших камешков со второго и третьего этажа и рассчитывает расстояние до земли по формуле $h = 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время падения камня (в секундах). Оказалось, что для второго этажа время падения камешка оказалось равным 0,7 секунды, а для третьего на 0,4 секунды больше. Чему равна высота этажа? Ответ выразите в метрах.

- б) Для измерения высоты этажа в доме мальчик измеряет время t падения небольших камешков со второго и четвёртого этажа и рассчитывает расстояние до земли по формуле $h = 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время падения (в секундах). Оказалось, что для второго этажа время падения камешка оказалось равным 0,6 с, а для четвёртого на 0,8 с больше. Чему равна высота этажа? Ответ выразите в метрах.

16. а) Тело брошено вертикально вверх с высоты 28 метров. Пока тело не упало, высота, на которой оно находится, описывается формулой $h(t) = 28 + 13t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Через сколько секунд тело упадет?

- б) Камень брошен вертикально вверх с высоты 11,2 метра. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = 11,2 + 10t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Через сколько секунд камень упадет?

17. а) Камень брошен под углом к горизонту с высоты 3,6 метра. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = 3,6 + 8t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень будет находиться на высоте не менее 6 метров?

- б) Камень брошен под углом к горизонту с высоты 9 метров. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = 9 + 12t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень будет находиться на высоте не менее 13 метров?

18. а) От острова, расположенного в 5 км от пристани, отходит катер. До тех пор, пока катер не подойдёт к пристани, его расстояние до неё описывается формулой $s(t) = 5 + 8t - 4t^2$, где s – расстояние в километрах, t – время в часах, прошедшее с момента отплытия. Зона видимости наблюдателя, находящегося в бухте, составляет 8 км. Сколько всего времени катер будет находиться в зоне видимости наблюдателя, пока не подойдёт к пристани? Ответ дайте в часах.
- б) От острова, расположенного в 2,1 км от пристани, отходит катер. До тех пор, пока катер не подойдёт к пристани, его расстояние до неё описывается формулой $s(t) = 2,1 + 20t - 10t^2$, где s – расстояние в километрах, t – время в часах, прошедшее с момента отплытия. Зона видимости наблюдателя, находящегося в бухте, составляет 5,7 км. Сколько всего времени катер будет находиться в зоне видимости наблюдателя, пока не подойдёт к пристани? Ответ дайте в часах.
19. а) Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1000$ К, $a = -5$ К/мин², $b = 150$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1880 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.
- б) Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 600$ К, $a = -6$ К/мин², $b = 250$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1700 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.
20. а) Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 10$ кг и радиуса $R = 8$ см, и двух боковых с массами $M = 2$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, задаётся формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $608 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.
- б) Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 9$ кг и радиуса R см, и двух боковых с массами $M = 3$ кг и с радиусами $R + h$, где $h = 2$ см. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, задаётся формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении R момент инерции катушки не превышает предельного значения $882 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.
21. а) В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 70$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом, их общее сопротивление задаётся формулой $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 21 Ом. Ответ выразите в омах.

- б) В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 20$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом, их общее сопротивление задается формулой $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 15 Ом. Ответ выразите в омах.

22. а) Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 – температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 30%, если температура холодильника $T_2 = 350$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

- б) Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 – температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 20%, если температура холодильника $T_2 = 280$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

23. а) Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель – целое число от 0 до 6. Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций – вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}$. Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 2.

- б) Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель – целое число от 0 до 12. Составители рейтинга считают, что объективность ценится в пять раз, а информативность публикаций – втрое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{3In + Op + 5Tr + Q}{A}$. Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 20.

Проверочная работа № 1

Вариант 1

1. Решите уравнения:

а) $2(6 - 2x) - 4 = 18 - 3(1 + 3x)$;

б) $\frac{2x}{17} = 3\frac{3}{17}$;

в) $\frac{1}{4} - \frac{5x-1}{8} = \frac{5-x}{6}$;

г) $(7-x)^2 = (x+3)^2$.

2. Решите уравнения и выполните указание:

а) $(8x - 2)(10x + 15) = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них;

б) $13x + 3x^2 - 10 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них;

в) $(4x - 5)^2 = 14x^2 - 47x + 34$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите произведение корней;

г) $\frac{x-8}{9x-2} = \frac{x-8}{8x-7}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них;

д) $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

3. Решите уравнения:

а) $7 = \frac{35}{x-4}$;

б) $7 = \frac{18+2x}{9-x}$;

в) $\frac{1}{4-x} - \frac{2}{7-x} = 0$.

4. Используя закон всемирного тяготения в виде $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где F – сила притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 – массы тел (в килограммах), r – расстояние между центрами масс (в метрах), а γ – гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$, найдите массу тела m_1 в килограммах, если $F = 26,68 \text{ Н}$, $m_2 = 6 \cdot 10^8 \text{ кг}$, $r = 3 \text{ м}$.

Вариант 2

1. Решите уравнения:

а) $22 - 5(2 + 3x) = -7(9 - 5x)$;

б) $5 - \frac{x}{18} = \frac{x}{27}$;

в) $\frac{1}{5} - \frac{4+x}{6} = \frac{9-x}{12}$;

г) $(x+4)^2 = (6-x)^2$.

2. Решите уравнения и выполните указание:

а) $(9x+18)(8x-6) = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них;

б) $x^2 + 11x + 18 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите больший из них;

в) $(5x+7)^2 = 17x^2 + 84x + 46$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите произведение корней;

г) $\frac{x-6}{7x-2} = \frac{x-6}{6x-7}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них;

д) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

3. Решите уравнения:

а) $\frac{24}{11-x} = 8$;

б) $\frac{45(x-1)}{5-x} = 15$;

в) $\frac{2}{5-x} - \frac{1}{6-x} = 0$.

4. Используя закон всемирного тяготения в виде $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где F – сила притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 – массы тел (в килограммах), r – расстояние между центрами масс (в метрах), а γ – гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$, найдите массу тела m_1 в килограммах, если $F = 20,01 \text{ Н}$, $m_2 = 64 \cdot 10^7 \text{ кг}$, $r = 4 \text{ м}$.

§ 2. Иррациональные выражения и уравнения

24. Найдите значение выражения:

а) $\frac{(3\sqrt{7})^2}{3}$; б) $\frac{(5\sqrt{3})^2}{3}$; в) $\frac{18}{(6\sqrt{5})^2}$; г) $\frac{24}{(4\sqrt{6})^2}$.

25. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{51^2 - 45^2}$; б) $\sqrt{371^2 - 196^2}$.

26. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{54} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6}$; б) $(\sqrt{108} - \sqrt{363}) \cdot \sqrt{675}$.

27. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{11,2} \cdot \sqrt{2,7}}{\sqrt{0,84}}$; б) $\frac{\sqrt{4,5} \cdot \sqrt{7,5}}{\sqrt{2,4}}$.

28. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{73} - \sqrt{21})(\sqrt{73} + \sqrt{21})$; б) $(5\sqrt{2} + \sqrt{32})(\sqrt{32} - \sqrt{50})$ в) $(\sqrt{72} - \sqrt{69})(\sqrt{69} + 6\sqrt{2})$.

29. Найдите значение выражения:

а) $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{75})^2}{4}$; б) $\frac{(\sqrt{29} + \sqrt{13})^2}{21 + \sqrt{377}}$.

30. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{3\frac{29}{32}} - \sqrt{5\frac{5}{8}}\right) : \sqrt{\frac{5}{32}}$; б) $\left(\sqrt{10\frac{5}{7}} - \sqrt{6\frac{6}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{343}}$.

31. Найдите корень уравнения:

а) $\sqrt{x-12} = 3$; б) $\sqrt{2x+33} = 5$; в) $\sqrt{27-x} = 6$; г) $\sqrt{-41-15x} = 2$.

32. а) Решите уравнение $\sqrt{2x+35} = x$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из них.

б) Решите уравнение $\sqrt{27-6x} = -x$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

33. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\frac{10}{7x-8}} = \frac{1}{3}$; б) $\sqrt{\frac{3}{298-5x}} = \frac{1}{11}$.

34. Найдите корень уравнения:

а) $\sqrt[3]{5x-8}=3$; б) $\sqrt[5]{7x+10}=-2$; в) $\sqrt[3]{3x+8}=-4$; г) $\sqrt[5]{7-5x}=2$.

35. а) Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 1750 Н, масса автомобиля равна 2000 кг, путь составил 700 м.

б) Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 3000 Н, масса автомобиля равна 1200 кг, путь составил 500 м.

36. а) При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 20$ м – длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с – скорость света, а v – скорость ракеты (в км/с). Найдите наблюдаемую длину ракеты при скорости 180000 км/с. Ответ выразите в метрах.

б) При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 25$ м – длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с – скорость света, а v – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 24 м? Ответ выразите в км/с.

37. а) Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. Человек, стоящий на набережной, видит горизонт на расстоянии 6,4 км. К набережной ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 9,6 километров?

б) Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. Человек, стоящий на набережной, видит горизонт на расстоянии 4 км. К набережной ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 15 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 5,6 километров?

Проверочная работа № 2

Вариант 1

1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{1,44}$;

б) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$;

в) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50}$;

г) $\sqrt{2^8 \cdot 3^6}$.

2. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{4,2 \cdot 7,5 \cdot 14}$;

б) $\frac{(3\sqrt{13})^2}{52}$.

3. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{85^2 - 84^2}$;

б) $(5 + \sqrt{57}) \cdot (\sqrt{57} - 5)$;

в) $(7\sqrt{45} - 6\sqrt{20}) \cdot \sqrt{5}$.

4. Решите уравнения:

а) $\sqrt{35 - 2x} = 7$;

б) $\sqrt{\frac{24}{11 - x}} = 4$;

в) $\sqrt{\frac{3}{2x + 27}} = \frac{1}{7}$.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{-72 - 17x} = -x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = \frac{U^2 t}{R}$, где U – напряжение (в вольтах), R – сопротивление (в омах), t – время (в секундах). Пользуясь формулой, найдите U (в джоулях), если $t = 20$ с, $A = 48$ Дж и $R = 15$ Ом.

Вариант 2

1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{1,96}$;

б) $\sqrt{2\frac{17}{16}}$;

в) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$;

г) $\sqrt{3^4 \cdot 4^6}$.

2. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{5,2 \cdot 3,9 \cdot 27}$;

б) $\frac{69}{(2\sqrt{23})^2}$.

3. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{113^2 - 112^2}$;

б) $(9 - \sqrt{61}) \cdot (\sqrt{61} + 9)$;

в) $(8\sqrt{24} + 3\sqrt{54}) \cdot \sqrt{6}$.

4. Решите уравнения:

а) $\sqrt{13 - 2x} = 3$;

б) $\sqrt{\frac{16}{5 - 2x}} = 4$;

в) $\sqrt{\frac{3}{2x + 49}} = \frac{1}{5}$.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{-72 + 17x} = x .$$

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = \frac{U^2 t}{R}$, где U – напряжение (в вольтах), R – сопротивление (в омах), t – время (в секундах). Пользуясь формулой, найдите U (в джоулях), если $t = 25$ с, $A = 225$ Дж и $R = 9$ Ом.

§ 3. Степенные выражения и уравнения

38. Найдите значение выражения:

а) $5^8 \cdot 625^{-2}$; г) $9^{1,1} \cdot 27^{0,6}$;

б) $3^5 \cdot 81^{-\frac{1}{2}}$; д) $11^{\frac{5}{9}} \cdot 121^{\frac{2}{9}}$;

в) $2^{1,24} \cdot 4^{1,38}$; е) $7^{\frac{10}{11}} \cdot 49^{\frac{6}{11}}$.

39. Найдите значение выражения:

а) $\frac{4^{3,5}}{64^{1,5}}$; б) $\frac{5^{3,2}}{625^{0,3}}$; в) $\frac{81^{2,2}}{9^{1,4}}$; г) $\frac{16^{2,5}}{4^{3,5}}$.

40. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2^{5,3} \cdot 14^{3,3}}{28^{2,3}}$; б) $\frac{3^{3,1} \cdot 15^{4,1}}{45^{2,1}}$.

41. Найдите значение выражения:

а) $4^3 \cdot 3^5 : 12^4$; б) $35^{-2,3} \cdot 5^{1,3} : 7^{-3,3}$.

42. Найдите значение выражения:

а) $5 \cdot \sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[20]{81}$; б) $\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[30]{32}$; в) $\frac{\sqrt[4]{11} \cdot \sqrt[12]{11}}{\sqrt[3]{11}}$; г) $\frac{\sqrt[5]{375} \cdot \sqrt[5]{75}}{\sqrt[5]{9}}$.

43. Найдите значение выражения:

а) $(13^4)^7 : 13^{26}$; б) $(49^3)^5 : (7^7)^4$.

44. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{21^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{21}}{\sqrt[12]{21}} \right)^2$; б) $\frac{\left(5^{\frac{4}{9}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \right)^{36}}{15^{16}}$.

45. Найдите значение выражения:

а) $\frac{4(x^8)^5 + 5(2x^{20})^2}{3(x^{10})^4}$ при $x \neq 0$; б) $\frac{2(x^9)^6 + 7(2x^{27})^2}{2(x^{18})^3}$ при $x \neq 0$.

46. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[5]{a}} \cdot \sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[5]{a}$ при $a = 9$; б) $\sqrt[7]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ при $a = 16$.

47. Найдите корень уравнения:

а) $5^{x-3} = 125$; б) $3^{1-x} = 81$; в) $2^{2x-9} = \frac{1}{32}$; г) $7^{7+3x} = \frac{1}{49}$.

48. Найдите корень уравнения:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-4} = \frac{1}{64}$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{9-2x} = 27$;
б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{17-2x} = \frac{1}{243}$; д) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 5$;
в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{9+4x} = 125$; е) $\left(\frac{1}{36}\right)^{3-x} = 6$.

49. Найдите корень уравнения:

а) $3^{5-x} = 9^{1+x}$; б) $3^{2x+4} = 6 \cdot 4^{1+x}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{8-x} = 625^{3-x}$; г) $324 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5x-1} = 3^{10x}$.

50. а) На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 264600 Н? Ответ выразите в метрах.

б) На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 1225000 Н? Ответ выразите в метрах.

51. а) Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность $P = \sigma S T^4$, где P – мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \times \text{К}^4}$ – постоянная, S – площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T – температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $5 \cdot 10^{19} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $4,56 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

б) Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность $P = \sigma S T^4$, где P – мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \times \text{К}^4}$ – постоянная, S – площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T – температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $2 \cdot 10^{18} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $7,125 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Проверочная работа № 3

Вариант 1

1. Найдите значения выражений:

а) $\frac{(6^{-5})^9 \cdot 6^{15}}{6^{-32}}$;

б) $8^{-4} \cdot 16^5 : 32^0$.

2. Найдите значения выражений:

а) $0,005 \cdot 10^4 + 0,07 \cdot 10^3 - 0,4 \cdot 10^1$;

б) $12 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-1}$.

3. Найдите значение выражения:

$$(-0,1)^3 - (-0,2)^2 + (-0,6)^0.$$

4. Найдите значения выражений:

а) $\frac{b^{3,33}}{b^{2,01} \cdot b^{2,32}}$ при $b = \frac{2}{7}$;

б) $a^{\frac{1}{5}} \cdot \left(a^{\frac{9}{10}}\right)^2$ при $a = 7$.

5. Решите уравнения:

а) $5^{-5+x} = 125$;

б) $6^{12,5x+12} = \frac{1}{216}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x} = 256$.

6. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v^2 = 2la$. Определите, с какой наименьшей скоростью будет двигаться автомобиль на расстоянии 0,4 километра от старта, если по конструктивным особенностям автомобиля приобретаемое им ускорение не меньше 32000 км/ч². Ответ выразите в км/ч.

Вариант 2

1. Найдите значения выражений:

а) $\frac{(5^3)^{16} \cdot 5^{-54}}{5^{-4}};$

б) $81^0 \cdot 27^6 : 9^7.$

2. Найдите значения выражений:

а) $0,0009 \cdot 10^6 + 0,002 \cdot 10^5 - 0,6 \cdot 10^2;$

б) $8 \cdot 10^{-5} + 61 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-2}.$

3. Найдите значение выражения:

$$(-0,3)^4 - (-0,1)^3 - (-0,0004)^0.$$

4. Найдите значения выражений:

а) $\frac{a^{3,53}}{a^{2,01} \cdot a^{2,52}}$ при $a = \frac{2}{7};$

б) $b^{\frac{3}{5}} \cdot \left(b^{\frac{7}{10}}\right)^2$ при $b = 6.$

5. Решите уравнения:

а) $6^{-5+x} = 216;$

б) $7^{12,5x+12} = \frac{1}{343};$

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10-3x} = 243.$

6. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v^2 = 2la$. Определите, с какой наименьшей скоростью будет двигаться автомобиль на расстоянии 0,8 километра от старта, если по конструктивным особенностям автомобиля приобретаемое им ускорение не меньше 6250 км/ч². Ответ выразите в км/ч.

§ 4. Логарифмические выражения и уравнения

52. Найдите значение выражения:

а) $\log_3 243$; в) $\log_{0,2} 625$;

б) $\log_5 \frac{1}{125}$; г) $\log_{0,5} 1024$.

53. Найдите значение выражения:

а) $\log_3 \log_2 512$; б) $\log_2 \log_{81} 3$.

54. Найдите значение выражения:

а) $\log_{11} \sqrt[5]{121}$; б) $\log_{13} \sqrt[4]{169}$

55. Найдите значение выражения:

а) $\log_{\sqrt[3]{7^2}} 7$; в) $\log_{\frac{1}{9}} 27$;

б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{10}}} 1000$; г) $\log_{\frac{1}{8}} 64$.

56. Найдите значение выражения:

а) $36^{\log_6 7}$; в) $49^{\log_7 16}$;

б) $5^{\log_{0,04} 16}$; г) $0,2^{\log_{125} 8}$.

57. Найдите значение выражения:

а) $\log_{10} 125 + \log_{10} 0,8$; в) $\log_3 1620 - \log_3 20$;

б) $\log_{0,2} 156,25 + \log_{0,2} 4$; г) $\log_7 2058 - \log_7 6$.

58. Найдите значение выражения:

а) $\log_4 8\sqrt{3} - \log_2 4\sqrt[4]{3}$; б) $\log_8 64\sqrt{3} - \log_2 2\sqrt[6]{3}$.

59. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\log_3 512}{\log_3 4}$; б) $\frac{\log_5 243}{\log_{25} 81}$.

60. Найдите значение выражения:

а) $\log_7 25 \cdot \log_{625} 49$; б) $\log_{0,25} 25 \cdot \log_5 32$.

61. Найдите значение выражения:

а) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$; б) $\log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$.