

2016–2017 уч. г.

Материалы студенческой научной сессии



Математический факультет

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

Математический факультет



Материалы студенческой научной сессии

г. Москва, 03–08 апреля 2017 г.

Сборник статей

Под общей редакцией Е. С. Крупицына

Электронное издание

МПГУ
Москва — 2018

УДК 5(082)
ББК 22.1я43
М341

М341 Материалы студенческой научной сессии. г. Москва, 03–08 апреля 2017 г. : сборник статей / под общ. ред. Крупицына Е. С. ; Московский педагогический государственный университет. Математический факультет [Электронное издание]. — Москва : МПГУ, 2018. — 112 с.

ISBN 978-5-4263-0613-4

Сборник содержит статьи участников студенческой научной сессии, прошедшей в г. Москва 03–08 апреля 2017 г.

Адресован студентам, магистрантам, аспирантам, учителям математики и информатики.

УДК 5(082)
ББК 22.1я43

ISBN 978-5-4263-0613-4

© МПГУ, 2018
© Коллектив авторов, 2018

Содержание

<i>Яковлев С. С. (Москва, МПГУ)</i>	
Аппроксимация табличной функции полиномами по методу наименьших квадратов с использованием СКМ Maple	6
<i>Шульгина Д. С. (Москва, МПГУ)</i>	
Методика разработки и применения электронного образовательного ресурса при обучении информатике на примере темы «Системы счисления»	12
<i>Федотенко М. А. (Москва, МПГУ)</i>	
Мобильное приложение как средство обучения решению задач по программированию школьного курса информатики	20
<i>Кульгускин И. А. (Москва, МПГУ)</i>	
О порядках 2×2 матриц с комплексными, действительными и рациональными коэффициентами. Матричные корни квадратных трехчленов над полем $\mathbb{R}$	26
<i>Петров И. А.</i>	
Строение виртуального тензора и формы Ли главного T^1 – расслоения над некоторыми классами почти контактных метрических многообразий	33
<i>Салахова А. А. (Москва, МПГУ)</i>	
Формирование инженерной культуры обучающихся средствами робототехнических соревнований FIRST Tech Challenge	38
<i>Тырданова М. С. (Москва, МПГУ)</i>	
Применение технологии дополнительной реальности при изучении трехмерных графических моделей	43
<i>Юхнов А. А. (Москва, МПГУ)</i>	
Об эндоморфизмах r -локальных групп без кручения	49
<i>Алексеева Н. А. (Москва, МПГУ)</i>	
Применение кватернионов к преобразованиям четырехмерного евклидова пространства	51
<i>Александрова А. Д. (Москва, МПГУ)</i>	
Инверсия на плоскости	67
<i>Артемов Д. Ю. (Москва, МПГУ)</i>	
О нумерации целочисленных многочленов одной переменной	77
<i>Попадьина Е. А. (Москва, МПГУ)</i>	
Методика обучения умению правильно рассуждать учащихся 9 класса на курсе по выбору	93

Горгинян Ю. А. (Москва, МПГУ)

Классы почти контактных метрических структур тотального пространства T^1 -расслоения с некоторыми связностями над почти эрмитовыми многообразиями	103
---	-----

Аппроксимация табличной функции полиномами по методу наименьших квадратов с использованием СКМ Maple

Яковлев С. С. (Москва, МПГУ)

ss.yakovlev@mpgu.edu

науч. рук. Горелик В.А. д.ф.-м.н., профессор каф. ТИДМ МПГУ

Аннотация

Рассматривается постановка и решение задачи аппроксимации табличной функции полиномами n -ой степени по методу наименьших квадратов (МНК) с использованием инструментария системы компьютерной математики (СКМ) Maple.

1. Постановка задачи

Приближение данных табличной функции

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N} \quad (1)$$

полиномом n -ной степени вида

$$p^{(n)}(x) = p_1 x^n + p_2 x^{(n-1)} + \dots + p_n x + p_{n+1} \quad (2)$$

по методу наименьших квадратов (МНК) состоит в решении следующей задачи минимизации

$$\min_{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}} \sum_{i=1}^N \left(p^{(n)}(x_i) - y_i \right)^2 \quad (3)$$

Это означает, что разыскивается полином $p^{(n)}(x)$, который наименее уклоняется от заданных данных в том смысле, что сумма квадратов расстояний от заданных точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$ до точек полинома $\{(x_i, p^{(n)}(x_i))\}_{i=1, \dots, N}$ будет минимальной.

Например, на рисунке 1 приведена аппроксимация табличной функции

$$\{(x_i, y_i)\} = \{(1, 0); (2, -2); (3, 9); (4, -2); (5, -21); (6, 30)\}, \quad (4)$$

где $i = 1, 2, \dots, 6$, полиномом третьей степени, коэффициенты которого найдены по МНК:

$$p^{(3)}(x) = 3,0278 \cdot x^3 - 29,202 \cdot x^2 + 80,198 \cdot x - 58,0 \quad (5)$$

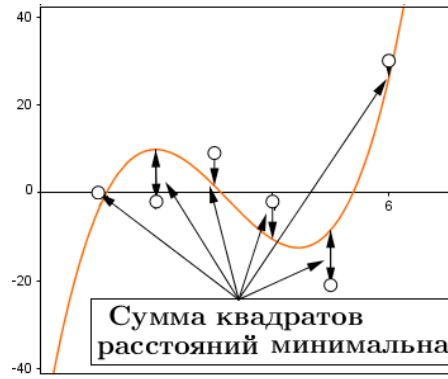


Рис. 1.

При решении задачи полиномиальной аппроксимации степень полинома должна быть меньше количества заданных точек для того, чтобы такой полином был единственным.

Запишем полином (2) в виде

$$p^{(n)}(x) = p_1x^n + p_2x^{(n-1)} + \dots + p_nx + p_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} p_kx^{n-k+1} \quad (6)$$

Тогда задача о построении полиномиального приближения сводится к поиску минимума по переменным $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ следующей функции

$$F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^{n+1} p_kx_i - y_i \right)^2 \quad (7)$$

Функция $F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$ является квадратичной функцией (с неотрицательными коэффициентами при квадратах неизвестных), поэтому ее минимум достигается в той точке, где выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}{\partial p_2} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}{\partial p_{n+1}} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Взяв частные производные от $F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$ по $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ и приравняв их к нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из $(n+1)$ -го уравнения для нахождения искомых коэффициентов полинома n -ой степени, наилучшим образом в смысле наименьших квадратов

приближающего данные $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$ и содержит ошибку в среднеквадратичной норме, т.е. значение

$$e = \sqrt{\min_{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}} \sum_{i=1}^N (p^{(n)}(x_i) - y_i)^2} \quad (9)$$

Эта система имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^N x_i^{n-j+1} \cdot x_i^{n-k+1} \right)^2 = \sum_{i=1}^N x_i^{n-j+1} \cdot y_i, \quad (10)$$

где $j = 1, 2, \dots, n+1$.

Переходя к матричной форме записи системы уравнений (10), получим

$$\mathbf{A} \cdot \vec{p} = \vec{b}, \quad (11)$$

где вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1})^T$, а элементы матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\vec{b}$ правой части системы выражаются формулами:

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N x_i^{n-j+1} \cdot x_i^{n-k+1}; \quad b_j = \sum_{i=1}^N x_i^{n-j+1} \cdot y_i, \quad (12)$$

где $j, k = 1, 2, \dots, n+1$.

Таким образом, задача полиномиальной аппроксимации сводится к задаче решения системы линейных уравнений (10).

Данная система имеет единственное решение и может быть решена методами линейной алгебры, например, методом Крамера или методом обратной матрицы, при котором $\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Например, для поиска значений коэффициентов полинома (5) по формулам (12)) получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N x_k^6 & \sum_{k=1}^N x_k^5 & \sum_{k=1}^N x_k^4 & \sum_{k=1}^N x_k^3 \\ \sum_{k=1}^N x_k^5 & \sum_{k=1}^N x_k^4 & \sum_{k=1}^N x_k^3 & \sum_{k=1}^N x_k^2 \\ \sum_{k=1}^N x_k^4 & \sum_{k=1}^N x_k^3 & \sum_{k=1}^N x_k^2 & \sum_{k=1}^N x_k \\ \sum_{k=1}^N x_k^3 & \sum_{k=1}^N x_k^2 & \sum_{k=1}^N x_k & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N x_k^3 \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^N x_k^2 \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^N x_k \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^N y_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

ИЛИ

$$\begin{bmatrix} 67171 & 12201 & 2275 & 441 \\ 12201 & 2275 & 441 & 91 \\ 2275 & 441 & 91 & 21 \\ 441 & 91 & 21 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3954 \\ 596 \\ 90 \\ 14 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Находя обратную матрицу системы (14)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{324} & -\frac{35}{216} & \frac{317}{648} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{35}{216} & \frac{871}{504} & -\frac{575}{108} & \frac{13}{3} \\ \frac{317}{648} & -\frac{575}{108} & \frac{76555}{4536} & -\frac{257}{18} \\ -\frac{7}{18} & \frac{13}{3} & -\frac{257}{18} & 13 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

получаем

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \frac{5}{324} & -\frac{35}{216} & \frac{317}{648} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{35}{216} & \frac{871}{504} & -\frac{575}{108} & \frac{13}{3} \\ \frac{317}{648} & -\frac{575}{108} & \frac{76555}{4536} & -\frac{257}{18} \\ -\frac{7}{18} & \frac{13}{3} & -\frac{257}{18} & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3954 \\ 596 \\ 90 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{109}{36} \\ -\frac{2453}{84} \\ \frac{10105}{126} \\ -58 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

т.е. точным решением системы (14) является вектор $\vec{p} = \left(\frac{109}{36}; -\frac{2453}{84}; \frac{10105}{126}; -58\right)^T$ или приближенно $\vec{p} = (3, 0278; -29, 202; 80, 198; -58, 0)^T$.

2. Использование системы компьютерной математики Maple

Система компьютерной математики (СКМ) Maple [2,3], как и ряд других, располагает набором функций, которые позволяют автоматизировать вычислительные процедуры при решении задач линейной алгебры и задач полиномиальной аппроксимации табличных функций и статистических данных различными методами оптимизации и регрессивного анализа данных, включая и метод наименьших квадратов (МНК, или LS от англ. Least Squares) [1,4-6].

Для решения задач полиномиальной аппроксимации табличных функций предназначен пакет расширений называемый CurveFitting – аппроксимация (подбор) кривых. Функция LeastSquares() используется в двух формах:

- LeastSquares(xydata,x,opts), где xydata – список пар , x – имя аргумента полинома, opts – список параметров определяющих имя функции полинома, а также возможное наличие весовых коэффициентов и необходимость в поиске линейной комбинации полиномиальных функций.
- LeastSquares(xdata,ydata,x,opts), где xdata и ydata – списки величин для аргумента и значений табличной функции и соответственно, x – имя аргумента полинома, opts – список параметров определяющих имя функции полинома, а также возможное наличие весовых коэффициентов и необходимость в поиске линейной комбинации полиномиальных функций.

Например, для нахождения коэффициентов полинома 3-ей степени (5) составим следующую последовательность команд Maple:

$$\begin{aligned}
 &> \text{restart : with(CurveFitting)} \\
 &> \text{xp} := [1, 2, 3, 4, 5, 6] \\
 &> \text{yp} := [0, -2, 9, -2, -21, 30] \\
 &> f := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \\
 &> fx := \text{LeastSquares}(xp, yp, x, \text{curve} = f) \\
 &\quad fx = -58 + \frac{10105}{126}x - \frac{2453}{84}x^2 + \frac{109}{36}x^3 \\
 &> y := \text{evalf}(fx, 5) \\
 &\quad y = -58.0 + 80.198x - 29.202x^2 + 3.0278x^3
 \end{aligned} \tag{17}$$

Пошаговую последовательность определений и вычислений (17) можно прокомментировать следующим образом: подключение пакета CurveFitting; задание списка значений аргумента; задание списка значений табличной функции; запись формулы искомой функции; обращение к функции LeastSquares; вывод функции–результата fx ; округление коэффициентов полинома; вывод результата округления y .

Полученный в Maple полином 3-ей степени (17) совпадает с полиномом, который был найден как решение системы уравнений (16).

Для получения значения оценки продолжим вычисления следующими командами Maple:

$$\begin{aligned}
 &> e = \sqrt{\sum_{i=1}^6 (\text{subs}(x = xp[i], fx) - yp[i])^2} \\
 &\quad e = \frac{1}{14}\sqrt{89558} \\
 &> \text{evalf}(e, 5) \\
 &\quad 21.376
 \end{aligned}$$

Действуя аналогично приведенной выше последовательности команд Maple, можно найти все полиномы степеней с 1 по 5, аппроксимирующих табличную функцию (4).

Запишем их в виде таблицы.

n	Полином $p^{(n)}(x)$	e
1	$p^{(1)}(x) = 2,3429 \cdot x - 5,8667$	36,07
2	$p^{(2)}(x) = 2,5893 \cdot x^2 - 15,782 \cdot x + 18,3$	32,419
3	$p^{(3)}(x) = 3,0278 \cdot x^3 - 29,202 \cdot x^2 + 80,198 \cdot x - 58,0$	21,376
4	$p^{(4)}(x) = 2,3542 \cdot x^4 - 29,931 \cdot x^3 + 127,85 \cdot x^2 - 211,72 \cdot x + 111,50$	0,945
5	$p^{(5)}(x) = 0,125 \cdot x^5 + 0,16667 \cdot x^4 - 15,625 \cdot x^3 + 84,833 \cdot x^2 - 153,50 \cdot x + 84,0$	0

Научное издание

Материалы студенческой научной сессии
г. Москва, 03–08 апреля 2017 г.

Сборник статей

Под общей редакцией Е. С. Крупицына

Электронное издание

Статьи публикуются в авторской редакции

Компьютерная верстка Крупицын Е. С.
Оформление обложки Крупицын Е. С.

Управление издательской деятельности
и инновационного проектирования МПГУ
119571, Москва, Вернадского пр-т, д. 88, оф. 446.
Тел.: (499)730-38-61
E-mail: izdat@mpgu.edu

Подписано к публикации: 15.05.2018.
Объем 7 п.л. Заказ № 790.

ISBN 978-5-4263-0613-4

