

**Л.А. Кондратенко, Л.И. Миронова**

---

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
В СУЩЕСТВЕННО  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ**

**Монография**

**RU  
science**  
RU-SCIENCE.COM

**Москва  
2023**

УДК 531.3  
ББК 22.213  
К64

**Авторы:**

- Л.А. Кондратенко**, старший научный сотрудник, профессор кафедры 914 «Проектирование сложных технических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», д-р техн. наук,
- Л.И. Миронова**, профессор кафедры 914 «Проектирование сложных технических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», д-р техн. наук, доц.

**Кондратенко, Леонид Анатольевич.**

**К64** Моделирование динамических процессов в существенно нелинейных системах : монография / Л.А. Кондратенко, Л.И. Миронова. — Москва : РУСАЙНС, 2023. — 226 с.

**ISBN 978-5-466-02385-5**

В монографии изложен новый подход к моделированию и исследованию динамических процессов в двухзвенных механических системах, содержащих ведущее и ведомое звенья, соединенные силовыми линиями (магистралями). Учет в явном виде колебаний скоростей движения и напряжений в механизмах, содержащих стержневые линии, при выводе уравнений в частных производных является разработкой авторов. Применение преобразований по Лапласу позволило вывести уравнения, описывающие динамику в более общем виде. При этом упругость системы рассматривалась, как функция, зависящая, кроме параметров магистрали, от частоты колебаний, в определенных условиях способная стать причиной потери устойчивости. Построены номограммы зон устойчивой и неустойчивой работы. Для случаев использования внутренних обратных связей по промежуточной координате (давлению, напряжению) разработан новый частотный метод оценки устойчивости. Предложены новые численные методы в исследовании реальных механизмов, имеющих нелинейности, в том числе и существенные (люфт, ограничение по давлению и т.п.), основанные на модернизации метода Рунге-Кутты. Изложен математический аппарат, позволивший достаточно точно с высоким быстродействием моделировать динамические процессы, характеризуемые колебаниями скоростей движения и напряжений, в нелинейных системах с сосредоточенными и распределенными параметрами.

*Книга предназначена для научных сотрудников и специалистов машиностроительной, нефтегазовой и других отраслей промышленности, может быть полезна студентам старших курсов и аспирантам, занимающимся вопросами прочности и динамики механических систем.*

**Ключевые слова:** динамические процессы, устойчивость, количество движения, момент количества движения, напряжения, скорость, частота колебаний, частотная характеристика, переходный процесс, механические системы, нелинейность, распределенные параметры, численное моделирование, преобразование Лапласа.

**УДК 531.3  
ББК 22.213**

**ISBN 978-5-466-02385-5**

© Кондратенко Л.А.,  
Миронова Л.И., 2023  
© ООО «РУСАЙНС», 2023

# Содержание

|                                                                                                                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение .....</b>                                                                                                                                                        | <b>5</b>  |
| <b>ГЛАВА 1. Исходные уравнения динамики.....</b>                                                                                                                             | <b>10</b> |
| 1.1. Состояние вопроса .....                                                                                                                                                 | 10        |
| 1.2. Постановка задачи .....                                                                                                                                                 | 17        |
| 1.3. Феноменологическая модель «Зинера» .....                                                                                                                                | 18        |
| 1.4. Уравнения движения сплошной среды.....                                                                                                                                  | 23        |
| 1.5. Линейное упругое тело .....                                                                                                                                             | 33        |
| 1.6. Вывод базовых уравнений, связывающих скорости движения<br>частиц элементарного объема упругого стержня<br>с напряжениями .....                                          | 37        |
| 1.7. Уравнения продольных колебаний массы, закрепленной<br>на конце достаточно короткого упругого стержня.....                                                               | 39        |
| 1.8. Уравнение крутильных колебаний инерционного диска,<br>закрепленного на конце достаточно короткого<br>цилиндрического стержня .....                                      | 44        |
| 1.9. Уравнение колебаний массы, закрепленной на поршне,<br>соединенном с гидравлической магистралью .....                                                                    | 47        |
| <b>ГЛАВА 2. Уравнения колебаний в механизмах<br/>с бесконечным числом степеней свободы.....</b>                                                                              | <b>52</b> |
| 2.1. Динамические характеристики соединительных звеньев<br>(упругих магистралей) при продольных колебаниях .....                                                             | 52        |
| 2.2. Переходные процессы в магистрали при продольных колебаниях .....                                                                                                        | 59        |
| 2.3. Уравнение продольного движения исполнительного органа<br>механизма при согласованной нагрузке. Лемма о степени<br>распределенности параметров силовых магистралей ..... | 61        |
| 2.4. Реакция системы на изменение возмущающих воздействий<br>при отсутствии нелинейностей .....                                                                              | 68        |
| 2.5. Уравнения колебаний мощности при отсутствии нелинейностей .....                                                                                                         | 80        |
| 2.6. Уравнения колебаний в линейных системах с магистралями,<br>имеющими высокую податливость .....                                                                          | 83        |
| 2.7. Уравнения колебаний в нелинейном подпружиненном механизме с<br>одной степенью свободы .....                                                                             | 87        |
| 2.8. Уравнения колебаний в подпружиненном механизме с двумя<br>степенями свободы .....                                                                                       | 91        |
| 2.9. Метод исследования динамики системы с переменной упругостью<br>механической магистрали.....                                                                             | 101       |
| 2.10. Динамические свойства механических магистралей при<br>крутильных колебаниях .....                                                                                      | 105       |

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.11. Уравнения колебания скорости вращения и напряжений в механизме, скорость вращения ведущего звена которого зависит от нагрузки..... | 111 |
| 2.12. Влияние «отрицательного» сопротивления в нагрузке на колебания частоты вращения ведомого звена .....                               | 122 |
| 2.13. Уравнения колебаний скоростей движения и давлений в объемном гидроприводе .....                                                    | 124 |
| 2.14. Уравнения движения вала турбобура .....                                                                                            | 134 |
| 2.15. Математическая модель процесса обработки отверстий на станках с ЧПУ .....                                                          | 137 |

### **ГЛАВА 3. Численное моделирование динамических процессов**

|                                                                                                                                                                                                                                    |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>в существенно нелинейных двухзвенных механизмах.....</b>                                                                                                                                                                        | <b>148</b> |
| 3.1. Состояние вопроса .....                                                                                                                                                                                                       | 148        |
| 3.2. Имитационное моделирование нелинейных систем с сосредоточенными параметрами.<br>Модернизированный метод Рунге-Кутты .....                                                                                                     | 149        |
| 3.3. Имитационное моделирование нелинейного подпружиненного механизма [39], [47].....                                                                                                                                              | 158        |
| 3.4. Моделирование работы турбобура на стенде .....                                                                                                                                                                                | 160        |
| 3.5. Вывод уравнений для решения задач численного моделирования динамики двухзвенных механизмов с длинными магистралями .....                                                                                                      | 163        |
| 3.6. Моделирование динамических процессов в системах с распределенными параметрами .....                                                                                                                                           | 167        |
| 3.7. Устойчивость работы механических систем с распределенными параметрами. Теорема об устойчивости разомкнутых двухзвенных систем с распределенными параметрами. «Квантование» частоты вращения выходного вала гидропривода ..... | 169        |
| 3.8. Потеря устойчивости в приводе продольного перемещения .....                                                                                                                                                                   | 178        |
| 3.9. Потеря устойчивости в приводе вращательного действия .....                                                                                                                                                                    | 184        |
| 3.10. Теорема устойчивости системы при наличии в звеньях внутренних обратных связей по промежуточной координате .....                                                                                                              | 189        |
| <b>Заключение.....</b>                                                                                                                                                                                                             | <b>200</b> |
| <b>Приложения .....</b>                                                                                                                                                                                                            | <b>201</b> |
| <b>Список литературы .....</b>                                                                                                                                                                                                     | <b>217</b> |

# Введение

Современная промышленность представляет собой совокупность разнообразных производств, в которых существенную роль играют механические системы (машины), преобразующие энергию и (или) движение. Благодаря их использованию повышается производительность труда, облегчается физический и умственный труд человека и т.д. Из всего многообразия систем значительную часть по объему и реализации функционального назначения выполняют двухзвенные механизмы. Эти механизмы содержат входные и выходные звенья.

Как правило, входное звено является источником механической энергии (двигатель, насос), а выходное звено осуществляет функцию исполнительного органа, например, фреза, долото (или их режущие части) и т.д. При этом выходное звено совершает продольные или крутильные колебания. Соединяются эти звенья посредством силовых магистралей в виде стержней из металла либо эластичных материалов или гидравлических линий. Причем, исполнительный орган может быть одно- или многомассовым телом.

К таким механизмам относятся все приводы:

- гидравлические (используют в системах управления; для бурения скважин с помощью забойных гидродвигателей и пр.);
- механические (используют при механической обработке материалов во время сверления, фрезерования, обтачивания, при роликовом вальцевании теплообменных труб, бурении скважин роторным способом и т.п.);
- пневматические (используют в системах управления, различных машинах);
- паротурбинные (используют в тепловой и атомной энергетике в составе парогенератор-турбина-электрогенератор),
- другие разнообразные устройства, в состав которых в том или ином виде входят двухзвенные механизмы.

В применяемых в промышленности устройствах движущиеся звенья при функционировании либо совершают полезную работу, либо передают энергию движения для совершения такой работы. Во всех случаях в звеньях возникают деформации и напряжения, которые уравнивают внешние воздействия. Поскольку в процессе работы механических систем происходит передача мощности от входного звена к выходному, то кроме параметров, характеризующих точность перемещения, устойчивость работы и т.п., важную роль играют скорость движения выходного звена и возникающие в механизме напряжения.

Эти факторы существенным образом влияют на передаваемую каждой точкой сечения звена мощность, а также производительность и качество выполняемой работы.

В настоящее время технический уровень машин постоянно возрастает. Конкурентоспособность сложных технических систем на мировом рынке приводит разработчиков к необходимости создавать агрегаты и оборудование с высокими показателями качества, производительности и надежности конструкций. Такая постановка вопроса требует проведения более глубоких научных исследований динамических процессов, обусловленных сложными законами движения и точностью перемещений составных частей механизмов, с разработкой новых подходов и методов в механике сплошных сред и динамике систем твердых тел.

Современные методы исследования динамики механизмов во многих случаях основаны на применении уравнения Лагранжа второго рода, где рассматривается изменение кинетической и потенциальной энергий, и теоремы Гельмгольца, с помощью которой было выведено известное волновое уравнение, описывающее перемещение частиц вещества.

С использованием указанных подходов практические задачи по исследованию колебаний скоростей движения и напряжений в таких системах решаются опосредованно. Здесь возникает необходимость в определении второй производной перемещения или в пересчете перемещения в напряжение.

Если рассматривается система автоматического управления, то предметом исследований часто является качество управления (ошибка, быстродействие, устойчивость). Для решения таких задач разработано достаточно много методов [4, 5], [14] и др. Однако наличие во многих механизмах нескольких существенных нелинейностей (люфт, нелинейное трение, ограничения по давлению и перемещению, переменная упругость и т.д.) значительно затрудняют получение надежных и точных результатов.

Количественные характеристики колебаний выходной и промежуточной координат системы (скорости движения, напряжение) обычно не изучают, хотя именно они часто играют решающую роль в эффективности применения той или иной конструкции.

В тоже время, перемещение всегда является векторной величиной. Поэтому ее производная по времени будет сложной функцией, что в сочетании с определением форм колебаний [122] затрудняет процесс исследования.

Возникающие напряжения в звене тоже не всегда определяет или определяются перемещением частиц тела. Так, из феноменологической модели Зинера [100], [105], [118] следует, что модуль упругости (модуль Юнга) зависит от частоты колебаний и поэтому величина перемещения оказывается зависимой от частоты колебаний.

Кроме того, возникающие в процессе работы напряжения, например, в изогнутом стебле (адаптере) при сверлении глубоких отверстий, изменяют условия резания, которые влияют на вектор скорости движения режущей части инструмента и, как следствие, на качество отверстия. Подобные проблемы имеют место и в бурении скважин на нефть и газ, когда напряжения в изогнутой бурильной колонне, частота вращения ее или исполнительного органа могут существенно изменить траекторию движения долота. В таком случае итоговая точка достаточно дорогой скважины может не попасть в заданную область.

Скорость движения исполнительного органа, например, режущей части сверла, определяет производительность процесса изготовления отверстия, остаточные напряжения и шероховатость поверхности детали, стойкость инструмента. От возникающих напряжений в стебле зависит работоспособность сверла. В случае достаточно глубокого отверстия напряженное состояние стебля может стать причиной искажения траектории отверстия и привести к браку.

Вследствие недостатка знаний о происходящих процессах для определения рациональных режимов резания в таких операциях, особенно касаемых применения новых материалов, обычно проводят специальные достаточно дорогие исследования. Также и при бурении скважин на новых площадях, для которых нет сведений о свойствах породы. Наличие адекватной цифровой модели позволило бы существенно сократить как финансовые расходы, так и время освоения новых конструкций и технологий.

Следует при этом отметить, что полного описания динамических процессов с учетом различных нелинейностей в настоящее время нет, как для операций по обработке глубоких отверстий в серийных изделиях, так и для проводки скважин на известных площадях.

Колебания скорости в механизме при фрезеровании влияют на производительность труда, качество обработанной поверхности детали, ресурс инструмента и оборудования.

При проводке скважин на нефть и газ скорость вращения долота, закрепленного на конце колонны труб, имеющей длину несколько километров при диаметре до 168 мм, траектория движения инструмента определяют производительность процесса, стойкость инструмента (до-

лота, калибратор), качество скважины и в конечном итоге количество добываемого сырья. Из-за большой длины колонны в процессе бурения механизм попадает в разные условия работы. Поэтому для повышения эффективности в таких случаях необходимо соответствующим образом изменять режим работы, что невозможно сделать без адекватной математической, цифровой моделей и соответствующих устройств. Поддержание требуемого закона изменения скорости движения исполнительного органа является первоочередной задачей в разработке рациональной технологии процесса.

Приведем еще один пример. Во время работы редуктора, теплообменного аппарата и других устройств при взаимодействии сопряженных деталей в звеньях развиваются напряжения, которые в случае превышения допускаемых значений приводят к нарушению расчетных режимов работы или поломке механизма. Такие допускаемые значения могут быть превышены либо при обычном нагружении, либо вследствие длительного воздействия небольших циклических нагрузок. В настоящее время вопросы оценки ресурса таких конструкций решаются на основе статистических наблюдений по параметрам, полученным из анализа работы подобных устройств. В тоже время понятно, что функционирование каждого механизма является индивидуальным.

Из всех описанных примеров следует, что для повышения производительности и качества работы, а также ресурса инструмента и оборудования при обеспечении требуемых режимов функционирования устройств необходимо более точно знать законы изменения скорости движения и напряжений в узлах и деталях механизмов и уметь ими управлять. При этом для более эффективного применения отмеченных устройств важно с максимальной точностью поддерживать рациональные режимы работы, которые могут изменяться в зависимости от условий работы.

При наличии разнообразных воздействий решать подобные задачи по определению таких режимов и параметров, свидетельствующих о необходимости их изменений, можно лишь, имея соответствующую теорию и методы исследования. Это свидетельствует об актуальности поставленной задачи.

В связи с этим целью выполненных исследований явилась разработка новых математических методов и алгоритмов, дающих возможность описывать колебания скоростей движения и напряжений в существенно нелинейных двухзвенных механических системах. Разработанный математический аппарат позволит с позиций системного подхода оперативно учитывать большинство действующих факторов и

своевременно, практически в режиме реального времени, вырабатывать решения по обеспечению высокого качества производимой работы.

Изложенная проблема решена за счет использования нового подхода к описанию динамических процессов в двухзвенных механизмах и оригинального имитационного моделирования, адекватно отражающего процессы в рассматриваемых механизмах и позволяющего при существенно меньших временных затратах определять рациональные режимы работы или причины внезапных отказов.

Многие предложенные решения получены авторами в предыдущие годы и размещены в различных публикациях. Здесь они скомпонованы и дополнены новыми материалами.

# ГЛАВА 1. Исходные уравнения динамики

## 1.1. Состояние вопроса

Во многих отраслях промышленности главной задачей применяемого механизма является поддержание некоторого режима, обеспечивающего максимальные качество и эффективность работы исполнительного органа при наибольшем ресурсе всех звеньев, участвующих в процессе. Такой режим часто является основным. В случае обработки металлов резанием эффективность понимается как производительное срезание припуска с заготовки. При этом с учетом выполнения требуемых качественных показателей состояние поверхностного слоя обрабатываемых деталей должно характеризоваться минимальным уровнем остаточных напряжений.

При бурении скважин с высокой скоростью проходки в сочетании с максимально возможной стойкостью инструмента должны обеспечиваться требуемые параметры скважины и ее траектории. Отмеченные параметры во многом зависят от скорости движения исполнительного органа (ИО) и напряжений в магистральных.

Обычно в механике, при исследовании динамических процессов в механических системах решают задачу по определению изменения координат, формы колебаний [18], [21], [23, 24], [82], [84]. Такие процессы часто исследуются методами теории упругости, например, с помощью уравнения [3], [36]

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial(E f_k \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} = Q_H(x, t),$$

решение которого ищется в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \theta(x) \sin(p_k t + \alpha_k).$$

Здесь  $v$ ,  $E$  – массовая и упругая характеристики механической магистрали;  $f_k$  – площадь сечения;  $Q_H$  – интенсивность внешней нагрузки;  $H_k$ ,  $\theta_k$ ,  $p_k$ ,  $\alpha_k$  – постоянные, определяемые из начальных условий;  $x$  – координата вдоль оси линии;  $t$  – время.

В случае использования уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

рассматриваются колебания кинетической ( $T$ ) и потенциальной энергии ( $Q = -dU/dq$ , где  $U$  – потенциальная энергия,  $q$  – обобщенная координата).

Параметры движения механизма из этого уравнения определяются после некоторых преобразований.

Приведенные уравнения, лежащие в основе многих работ по динамике машин, например [3], [15], [37], [110], [113], [116, 117] и др., позволяют при заданных граничных условиях оценить изменение перемещений участка стержня, колонны и пр. во времени и пространстве. Однако такая информация при необходимости учета взаимосвязи большого количества факторов является с одной стороны избыточной, поскольку для оценки работоспособности системы часто достаточно знать при каких условиях возникают автоколебания частоты вращения технологического объекта (исполнительного органа), т.е. теряется устойчивость, а при каких нет.

С другой стороны, из-за отсутствия явных сведений о развиваемых напряжениях и скоростях движения в динамическом процессе трудно оценить вероятность разрушения детали или нарушения рабочего процесса. В случае использования систем с длинными силовыми магистралями возникает проблема описания поведения механизма при стандартных воздействиях, например скачкообразных и т.п.

В большинстве систем имеются нелинейности, как несущественные, так и существенные. Более того, обычно их бывает несколько, и они равноправно участвуют в процессе. В настоящее время не удалось найти универсальных математических (аналитических или численных) методов решения задач по определению параметров движения и напряженного состояния при наличии нескольких существенных нелинейностей.

Описанные методы не позволяют также в явном виде учесть изменения напряжений и реологические представления о передаче движения в механических системах [100], [106], которые достаточно ярко проявляются в быстрых, например волновых, процессах.

Особенностью процессов по обработке отверстий (глубокое сверление, бурение и т.п.) является то, что здесь практически невозможно зарегистрировать колебания скорости движения исполнительного органа (режущей части, долота). В таких конструкциях единственный способ управления (скорее самонастройки) заключается в

использовании местной (для исполнительного органа) обратной связи по промежуточной координате (давлению, напряжению). При этом наиболее сильное воздействие оказывает положительная обратная связь, ограничивающая устойчивость.

Для таких разомкнутых систем, где отсутствует обратная связь от исполнительного органа к двигателю, не было методов, с помощью которых можно оценить устойчивость, особенно при наличии нелинейностей. Поэтому с целью более точного исследования и разработки способов управления в таких системах был разработан специальный метод, включающий и теорему устойчивости.

Исследованию процессов в длинных силовых магистралях механических систем, обычно описываемых с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, посвящен ряд работ, например [3, 4], [8], [13], [38], [40], [81], [89], [99], [118] и т.д. При этом лишь в работах [38], [40], [99] учитывается наличие нагрузки на выходе.

Такие системы, следуя Бабакову И.М [3], можно отнести к системам с бесконечным числом степеней свободы. В связи с тем, что в механизмах с длинными магистралями имеют место значительные колебательные явления, то здесь весьма важно найти способ успокоения колебаний. Во многом это сводится к задаче обеспечения устойчивости работы. Данный путь связан с преодолением серьезных трудностей.

Для решения динамики таких систем в работе [6] было предложено использовать теорию разложения в форме полученного бесконечного семейства коммутирующих самосопряженных операторов с соответствующей проекционной спектральной теоремой. В предложенном методе устанавливаются теоремы представления положительно определенных функций бесконечного числа переменных в слое, изучается бесконечномерная проблема моментов. Роль операторов играет счетное семейство дифференцирований по различным переменным, бесконечные семейства сдвигов и т.д. Такой подход чаще всего дает отрицательные ответы. Основной вопрос был исследован лишь в отдельных частных случаях, когда были получены значения оптимальных управляющих воздействий, как для задач программного управления, так и для отдельных проблем синтеза систем с обратной связью.

Вообще, задача об аппроксимации управляемых систем с распределенными параметрами подходящими конечномерными системами представляется весьма важной проблемой, разрешение которой открыло бы новые эффективные пути и для теоретического исследования и для получения конкретного численного решения.

Помимо упомянутых выше исследований, связанных с использованием результатов, относящихся к проблеме моментов, и задач об управлении линейными параболическими и гиперболическими системами [6], обоснованных пока лишь для отдельных частных случаев, в литературе известно совсем мало результатов, относящихся к такому обоснованию.

На практике очень редко встречаются случаи, когда расчет колебаний (вибраций) того или иного конструктивного элемента может быть выполнен достаточно точно. Как правило, технические расчеты являются приближенными. Основные допущения делаются при выборе расчетной схемы конструкции. При этом игнорируются несущественные особенности системы и выделяются лишь главные ее параметры, определяющие характер явления, хотя в ряде случаев второстепенные особенности могут оказать большое влияние на работу механизма. Во многих случаях при проведении расчетов системы с распределенными массами заменяют системами с сосредоточенными массами. В расчетных моделях детали сложной геометрической формы (пружины, коленчатые валы и т. п.) обычно сводятся к эквивалентному прямому брусу, нелинейные упругие элементы часто заменяются эквивалентными линейными и т. д.

В ряде случаев такие задачи решают приближенным методом с заменой соответствующих функциональных уравнений подходящими конечномерными разностными схемами [9], [19]. В результате получается задача об оптимальном управлении аппроксимирующей системы, описываемой уравнениями в конечных разностях или системой обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для конечномерной системы возникает необходимость в рассмотрении принципа максимума и оценки сходимости аппроксимирующих управлений. Однако вопросы обоснования подобной конечноразностной аппроксимации исследованы еще недостаточно.

К настоящему времени значительный цикл работ посвящен динамике бурильной колонны. Несмотря на множество проведенных исследований, данная проблема изучается на основе выше описанного подхода [126]. При этом отмечается, что периодически в буровом приводе (механическом и гидравлическом) возникают автоколебания<sup>1</sup>, не-

---

<sup>1</sup> Симонянц С.Л. О влиянии динамической нагрузки на колебания частоты вращения вала турбобура / Научн. труды. ВНИИ буровой техники. 1980. Вып. 540. С. 49-54.

стабильные колебания (флаттер)<sup>1</sup> и другие явления. В процессе анализа динамики обычно изучают поперечные колебания колонны, крутильные колебания, сводящиеся к особенностям закручивания колонны, продольные колебания, но не рассматривают тот факт, что первопричиной всей динамики является скорость вращения долота  $\Omega_d$ , которую в обобщенном виде можно описать комплексной функцией в виде [38]

$$\Omega_d(s) = U_q(s)W_q(s) + U_p(s)W_{up}(s) - \\ - M_c(s)W_M(s) - M_H(s)W_{MH}(s),$$

где  $s$  – комплексная переменная;  $U_q(s)$ ,  $U_p(s)$  – изображения по Лапласу управляющих воздействий, связанных с изменением подачи насоса и частоты вращения ведущего конца (ротора);  $W_q(s)$ ,  $W_{up}(s)$  – передаточные функции соответственно каналов регулирования подачи насоса и частотой вращения ведущего конца исполнительного органа;  $M_c(s)$ ,  $M_H(s)$  – изображения, соответственно моментов, действующих на исполнительный орган и колонну;  $W_M(s)$ ,  $W_{MH}(s)$  – передаточные функции соответственно, каналов передачи моментов сопротивлений, действующих на исполнительный орган и колонну.

При этом момент сопротивления на долоте, зависит от угловой скорости  $\Omega_d$  и от осевого усилия  $G$ , и может быть определен по формуле

$$M_c(s) = K_\Omega \Omega_d(s) + K_G G(s).$$

Здесь  $K_\Omega = \frac{\partial M_c}{\partial \Omega_d}$ ;  $K_G = \frac{\partial M_c}{\partial G}$ .

Напряжения в колонне можно описать функцией

$$\sigma(t) = f(M_c, G, \Omega_k, \Omega_d, t...),$$

где  $\Omega_k$  – частота вращения колонны.

Следует также отметить, что процессы бурения сопровождаются разнообразными нелинейными эффектами (трение, ограничение перемещения, люфты, переменная упругость и т.д.) которые в настоящее время практически не учитывают. Поэтому полное описание динамики бурового привода возможно лишь при учете всех действующих факторов.

---

<sup>1</sup> Барский И.Л. О теоретических положениях динамики и устойчивости бурильной колонны и способах их реализации на практике // Технологии топливно энергетического комплекса. 2004. № 2. С. 26.

Моделирование подобных систем в принципе, возможно, также проводить с помощью аналоговых машин. Однако сложность создания модели, низкая точность результатов и малая мобильность машин существенно ограничивает распространение такого метода.

В большинстве случаев рассматриваемые механизмы работают под действием переменных внешних воздействий при наличии различных нелинейностей, в том числе и существенных. Периодические воздействия можно аппроксимировать гармоническими функциями, реакцию системы на которые удобно описывать частотными характеристиками. Часто воздействия имеют спорадический характер. Например, при глубоком сверлении попадание под режущее лезвие карбидной частицы вызовет резкое изменение момента сопротивления, которое в свою очередь может привести к искажению траектории отверстия или к нарушению поверхностного слоя. Описать в подобных случаях поведение системы с помощью частотных методов весьма сложно. Здесь необходимы расчеты, учитывающие колебания во временной области.

Так, например, в книге [99] выведены уравнения и получена передаточная функция силовой части гидропривода с учетом распределенности параметров жидкости по длине трубопроводов (магистралей) при гармонически линеаризованной характеристике подпиточных клапанов

$$W_{\alpha\gamma}(s) = \frac{K_{Q\gamma}}{q_m(s) \left[ D_1(s) ch[\vartheta(s)l] + D_2(s) sh[\vartheta(s)l] \right]},$$

где  $D_1(s)$ ,  $D_2(s)$  – операторные многочлены.

Однако использовать такую функцию для определения изменений выходной координаты во временной области весьма сложно.

Как отмечено ранее, при рассмотрении системы автоматизированного управления предметом исследований зачастую является качество управления (ошибка, быстродействие, устойчивость). Для решения таких задач, где обычно имеют место сосредоточенные параметры, разработано достаточно много методов [5], [12], [14], [27], [83], [87], [95], [97], [108] и др. Количественные характеристики колебаний выходной и промежуточной координат системы (скорость движения и напряжение) обычно не изучают, хотя именно они часто играют решающую роль в эффективности применения той или иной конструкции. Поэтому применяемые методы математического моделирования динамических процессов передачи движения в механических системах должны строиться на совокупном рассмотрении вопросов физики, ме-

ханики и теории управления. Недостаточно также разработаны вопросы устойчивости систем с распределенными параметрами.

Проблемой устойчивости движения математики и механики занимаются с 19 века. Для решения таких задач используют критерии и теории Рауса [104], [105], Гурвица [17], Ляпунова А.М. [85], Четаева Н.Г. [121], Михайлова А.В., Найквиста [94], Болотина В.В. [7], Попова Е.П. [98] и др.

Об устойчивости систем с распределенными параметрами, не охваченных обратными связями авторы Энциклопедии «Машиностроение» предлагают судить по дисперсионным соотношениям- собственным свойствам физического процесса. Если же дифференциальные уравнения будут иметь переменные коэффициенты, то решение следует искать численным методом [118].

В общем случае условие устойчивой работы системы с распределенными параметрами изложено в работах [111], [124], которое сформулировано следующим образом: «...если в подпространстве  $W_{|\varphi|} = 0$  процесс  $\varphi \equiv 0$  устойчив при интегрально малых возмущениях по мере  $\|\rho\|$ , а в подпространстве  $W_{|\varphi|} < 0$  – асимптотически устойчив при интегрально малых возмущениях по мере  $\|\rho\|$ , то в окрестности  $Z_R$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta(\varepsilon, t) > 0$ , что при  $t \geq T$  справедливо неравенство

$$\rho[\varphi(t)] < 2\delta,$$

если

$$\rho[\varphi(t_0)] < \delta \text{ и } \rho[h(x)] < \delta .».$$

Здесь  $\varphi$  – параметры процесса;  $h(x)$  – вектор функция допустимых решений.

Публикаций, посвященных исследованию устойчивости разомкнутых двухзвенных механических систем с распределенными параметрами при наличии существенных нелинейностей, где бы излагались достаточно четкие критерии, авторам монографии найти не удалось.

Исходя из изложенного, разработка методов исследования вопросов динамики и определения зон устойчивой и неустойчивой работы, фактических значений скоростей и напряжений, характеризующих особенности передачи мощности в механической системе, представляется весьма важной для выработки решений по повышению эффективности работы указанных устройств и является задачей предлагаемой работы.

## 1.2. Постановка задачи

С точки зрения механики искомая математическая модель будет охватывать класс символических математических объектов в виде чисел и векторов [78], поскольку параметры системы передачи движения могут быть описаны обобщенными координатами в многомерном пространстве [82]. Данный подход предполагает осуществлять математическое моделирование и численное моделирование.

Реальные механизмы содержат различные нелинейности, в том числе и существенные (трение, гистерезис, зона нечувствительности, ограничение по давлению, распределенные параметры и пр.). Динамические свойства и форма статических характеристик объекта вносят искажения в процесс функционирования, влияя, таким образом, на выходные механические характеристики. Такая система не может быть описана только линейными зависимостями. Аналитические исследования подобных систем чрезвычайно затруднены.

При решении изложенных проблем в работе рассматривались случаи отклонения частоты вращения (скорости движения) и напряжений от некоторых их установившихся значений, обеспечивающих рациональный режим работы механизма. В связи с этим в соответствии с теорией устойчивости [3] были изучены уравнения

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_i} f_i,$$

где  $\zeta_i$  – координаты системы;  $f_i = d\zeta_i / dt$ ;  $t$  – время;  $\Omega$  – скорость движения исполнительного органа (технологического объекта).

В конечном итоге исследования были сведены к изучению уравнений

$$d\zeta_i / dt = f_i(t, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n).$$

При этом разработаны новые методы, в явном виде учитывающие действие второй переменной – напряжения (давления) и наличие различных нелинейностей, позволившие определять для разных систем зоны устойчивой и неустойчивой работы.

В связи с практической невозможностью регистрации колебаний скорости вращения исполнительного органа при глубоком сверлении, бурении единственный способ влияния на процесс, кроме изменения внешних воздействий, заключается в использовании местной (для исполнительного органа) обратной связи по промежуточной координате (давлению, напряжению). Здесь наиболее сильное воздействие оказывает положительная обратная связь, ограничивающая устойчивость.

Способов для оценки ее влияния на работу системы не удалось найти. Поэтому одной из поставленных задач стала разработка метода исследования динамики систем с положительной обратной связью по промежуточной координате и способа оценки запасов устойчивости.

### 1.3. Феноменологическая модель «Зинера»

По вопросу передачи движения в механических системах существует ряд феноменологических моделей, в числе которых модели Максвелла, Фойгта, Зинера. Мы рассмотрим более общую модель Зинера [100], [106], рис. 1.1, которая позволяет несколько в другом аспекте математически формализовать свойственные характеристики и напряженно-деформированное состояние твердого тела, испытывающего нагрузку.

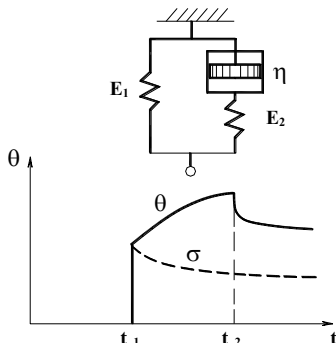


Рис. 1.1. Реологическая модель Зинера:  $\theta$  – деформация;  $\eta$  – вязкость материала;  $E_1, E_2$  – упругие постоянные;  $\sigma$  – нормальное напряжение

Здесь полагается, что имеется тело, которое вследствие возникновения напряжений в какое-то время упруго деформируется и в то же время может течь.

Модель представлена в виде ассиметричного гидромеханического контура, на одной ветви которого находится только пружина, а на другой – пружина с гидравлическим цилиндром, корпус которого связан с пружиной, а поршень связан с выходом из контура.

При наложении напряжения, когда  $t = t_1$ , пружины мгновенно деформируются на величины  $\sigma/E_1$  и  $\sigma/E_2$ , а поршень начинает равномерно перемещаться со скоростью

$$\frac{d\sigma}{\eta dt} = \frac{\sigma'}{\eta}.$$

Дифференциальное уравнение запишем в форме

$$\sigma + \frac{\eta \sigma'}{E_2} = E_1 \theta + \eta \theta'. \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma'$  – производная напряжения по времени;  $\theta'$  – производная деформации по времени.

Это более общее уравнение.

При  $\theta' = 0$  имеем

$$\sigma + \frac{\eta \sigma'}{E_2} = E_1 \theta_0$$

с решением

$$\sigma(t) = E_1 \theta_0 + (\sigma_0 - E_1 \theta_0) \exp(-t / \tau_\varepsilon),$$

где  $\tau_\varepsilon$  – время ретардации (запаздывания),  $\tau_\varepsilon = \eta / E_2$  – время релаксации при условии постоянной деформации.

При  $\sigma' = 0$  получим

$$\theta(t) = E_1 \sigma_0 + (\theta_0 - E_1 / \sigma_0) \exp(-t / \tau_\sigma),$$

Тогда общее уравнение записывается в форме

$$\sigma + \tau_\varepsilon \sigma' = E_1 (\theta + \tau_\sigma \theta'). \quad (1.2)$$

Обратившись к уравнению (1.1), преобразуем его в операторную форму, получим

$$D\sigma(t) = E_2 D\theta - \frac{1}{\tau_\varepsilon} (\sigma - E_1 \theta),$$

где  $D \equiv d/dt$ .

Выполним еще одно преобразование

$$\sigma \left( D + \frac{1}{\tau_\varepsilon} \right) = \theta E_2 \left( D + \frac{1}{k_\varepsilon \tau_\varepsilon} \right).$$

Здесь  $k_\varepsilon = E_2 / E_1$ .

Переходя при нулевых начальных условиях к преобразованиям по Лапласу [27], перепишем последнее уравнение

$$\sigma(s) \left( s + \frac{1}{\tau_\varepsilon} \right) = \theta(s) E_2 \left( s + \frac{1}{k_\varepsilon \tau_\varepsilon} \right). \quad (1.3)$$

Здесь  $s$  – комплексная переменная,  $s = j\omega$ , где  $j$  – мнимая единица.

Соотношение (1.3) позволяет дать обобщенное выражение для функции, характеризующей упругие свойства вещества

$$E(s) = \frac{\sigma(s)}{\theta(s)} = E_2 \frac{s + 1/(k_\varepsilon \tau_\varepsilon)}{s + 1/\tau_\varepsilon}.$$

Реологические исследования [100] также дали основание ввести дополнение к закону Гука, учитывающее особенности передачи динамических воздействий

$$E_\omega = \frac{\sigma(j\omega)}{\theta(j\omega)} = E_u + jE_v. \quad (1.4)$$

где

$$E_u = E_2 \frac{\tau_\varepsilon^2 \omega^2 + 1/k_\varepsilon}{\tau_\varepsilon^2 \omega^2 + 1}; \quad E_v = E_2 \frac{1 - 1/k_\varepsilon}{\tau_\varepsilon \omega + 1/( \omega \tau_\varepsilon )}.$$

Здесь  $E(s)$ ,  $E_\omega$  – комплексные функции, называемые изображениями по Лапласу функции, характеризующие упругие свойства вещества;  $\omega$  – параметр, который при рассмотрении продольных и крутильных колебаний будем называть круговой частотой гармонических колебаний. Величину  $E_\omega$  можно определить, измеряя скорость распространения звуковых волн и коэффициент затухания.

Кроме того, для процесса передачи мощности характерна нелинейная зависимость между напряжениями и деформацией. Она выражается в виде гистерезисной петли, рис. 1.2.

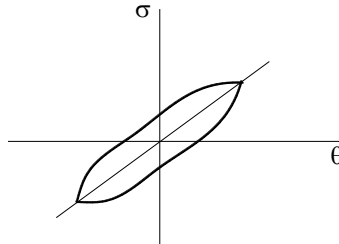


Рис. 1. 2. нелинейная зависимость между напряжениями и деформацией

Изображение по Лапласу изменений напряжения из (1.4) с учетом скачкообразной деформации  $\theta(t) = \theta_0 l(t)$ , записывается в форме [5], [27], [81]

$$\sigma(s) = \theta_0 E_2 \frac{s + 1/k_\varepsilon \tau_\varepsilon}{s(s + 1/\tau_\varepsilon)}.$$