САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

С. М. Бауэр
Л. А. Венатовская
Е. Б. Воронкова

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

УДК 534.1
ББК 22.251
Б29

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. *П. И. Бегун* (С.-Петерб. гос. электротехн. ун-т «ЛЭТИ»); д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (С.-Петерб. гос. ун-т)

*Печатается по решению*
*Учебно-методической комиссией*
*математико-механического факультета*
*Санкт-Петербургского государственного университета*

**Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б.**

Б29 Основы теории устойчивости упругих систем: учебное пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2017. — 52 с.

ISBN 978-5-288-05739-7

В учебном пособии кратко изложены основы теории устойчивости упругих систем. Особое внимание уделено задачам, в которых важно более точно определить нетривиальное докритическое состояние конструкции, даны основы теории Койтера — теории послекритического поведения конструкций.

Пособие предназначено для студентов, специализирующихся по направлению «Механики».

**УДК 534.1**
**ББК 22.251**



ISBN 978-5-288-05739-7

## СОДЕРЖАНИЕ

# 1. СТАТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ. СМЕЖНЫЕ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ. МЕТОД ЭЙЛЕРА

В классических задачах линейной теории упругости, когда допускаются только бесконечно малые деформации, предполагается, что условия равновесия выполняются за счет сил, действующих на недеформируемую упругую систему. Это допущение, которое существенно для теоремы Кирхгофа [15], ведет к существованию единственного решения линейной системы уравнений, описывающей напряженно-деформированное состояние механической конструкции.

Согласно теореме Кирхгофа задача о равновесии любого упругого тела в линейной постановке имеет единственное решение с точностью до перемещения тела как твердого целого. Это решение непрерывно зависит от внешних возмущений (внешних сил и заданных перемещений на границе тела), т. е. является устойчивым. Для справедливости теоремы Кирхгофа достаточно, чтобы потенциальная энергия, накопленная в теле в результате деформаций, была положительно определенной функцией деформаций.

В формулировке задачи бифуркации условия равновесия удовлетворяются за счет сил, действующих на деформированную систему. Это приводит к нелинейной постановке задачи в том смысле, что перемещения не являются линейными функциями приложенных внешних сил[1].

Уравнения бифуркации получаются при рассмотрении вариаций нелинейных уравнений. Каждая неизвестная величина $x$ в этих уравнениях заменяется на $x^0 + \delta x$. Здесь $x^0$ описывает начальное равновесное состояние. Устойчивость такого начального состояния,

[1] Теория бифуркаций динамических систем описывает качественные, скачкообразные изменения решений дифференциальных уравнений при непрерывном, плавном изменении параметров.

удовлетворяющего нелинейной системе уравнений, должна быть исследована. Дополнительные перемещения или вариации $\delta x$ описывают смежное равновесное состояние, которое бесконечно близко к начальному состоянию. Эти вариации удовлетворяют линейным однородным уравнениям (уравнениям ветвления, выпучивания или бифуркации) и однородным граничным условиям, которые получаются как результат линеаризации изначально нелинейных уравнений относительно $\delta x$ (см. параграф 1.1 в [9]). Рассматривая нетривиальные решения уравнений бифуркации, можно получить величину критической силы. При таком подходе удобно полагать, что нагрузка меняется пропорционально параметру нагружения $\lambda > 0$. Тогда переменные $x^0$ описывают первоначальное положение равновесия, а коэффициенты уравнений бифуркации зависят от параметра $\lambda$. Таким образом, задача о потере устойчивости сводится к задаче на собственные значения. Наименьшее (положительное) собственное значение принимается за величину критического значения $\lambda = \lambda_*$, соответствующего бифуркации в новое положение равновесия. Такой подход называется *статическим критерием* или *критерием Эйлера.*

## Задача 1

Пользуясь критерием Эйлера, получить критическую нагрузку потери устойчивости шарнирно опертого стержня при осевом сжатии (рис. 1).

Длина стержня — $l$, момент инерции поперечного сечения относительно центральной оси — $I$, модуль Юнга — $E$, осевая сила — $P$.

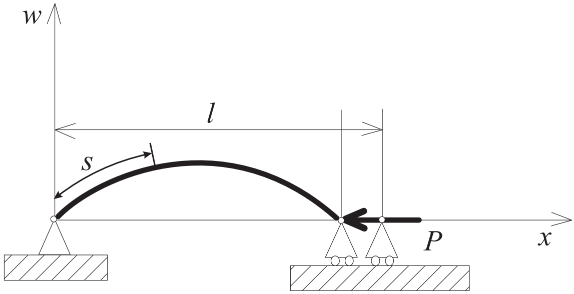


*Рис. 1.* Шарнирно опертый стержень при осевом сжатии

### Решение

Равновесие стержня описывается уравнением

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} + P\frac{d^2w}{dx^2} = 0, \tag{1}$$

где $w$ — поперечное смещение оси стержня. Граничные условия для шарнирно опертого стержня имеют вид

$$w\,(0) = 0, \quad \left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=0} = 0, \quad w\,(l) = 0, \quad \left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=l} = 0.$$

Необходимо определить те значения величины $P$, при которых уравнение допускает нетривиальные решения.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$w\,(x) = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D, \tag{2}$$

где

$$k^2 = \frac{P}{EI} \qquad \text{или} \qquad P = EIk^2.$$

Подставляя соотношение (2) в граничные условия, получаем

$$B = C = D = 0, \quad \sin kl = 0. \tag{3}$$

Наименьшее ненулевое значение $kl$, удовлетворяющее (3), равно $\pi$. Следовательно,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Этот подход имеет несколько недостатков. Во-первых, он не отвечает прямо на вопрос об устойчивости упругого тела. Он связан с этим вопросом довольно косвенным образом, поскольку определяет лишь нагрузку (нагрузки), при которых существуют бесконечно близкие смежные положения равновесия. Во-вторых, подход Эйлера не учитывает распределение массы в системе, и в некоторых случаях он может давать неверный результат. Например:

- когда начальное положение равновесия становится неустойчивым без появления бесконечно близких положений равновесия и система начинает испытывать явление флаттера (см. вторую часть решения задачи 4);