Московский
педагогический
государственный
университет

Г. В. Шеина

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

ЧАСТЬ 1

Москва
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

Г. В. Шеина

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

Часть 1

Учебное пособие

Издание второе, исправленное
и дополненное

МПГУ

Москва • 2016

УДК 512

ББК 22.14я73

Ш395

Рецензенты:

А. А. Фомин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет.

А. В. Жмулева, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры теории чисел, Московский педагогический государственный университет.

Шеина, Галина Валентиновна.

Ш395 Теория и практика решения задач по алгебре. Часть 1: Учебное пособие / Г. В. Шеина. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: МПГУ, 2016. – 106 с.

ISBN 978-5-4263-0350-8

Настоящее издание представляет собой исправленную и дополненную версию учебного пособия с тем же названием, вышедшую два года назад. Учебное пособие подготовлено на кафедре алгебры МПГУ, адресовано студентам математических факультетов педвузов и составляет содержание курса лекций и практических занятий первой половины первого семестра. В нем рассматриваются не только необходимые теоретические основы курса «Алгебра», но и приводится большое количество задач разного уровня сложности, в том числе и задания для самостоятельных и контрольных работ. Ответы и указания к решению призваны помочь читателю в его самостоятельной работе.

УДК 512

ББК 22.14я73

ISBN 978-5-4263-0350-8

Оглавление

Чтобы научить другого, требуется больше ума, чем чтобы научиться самому.

М. Монтень

Введение

Обучение студентов педагогов-математиков включает в себя изучение курса алгебры. Изучение математики в вузе отличается от изучения математики в школе тем, что большинство утверждений и теорем, используемых при решении задач, доказываются. Часто это оказывается непреодолимым препятствием для начинающих студентов. Поэтому мы начинаем с объяснения необходимости доказательств и подробно разбираем доказательства, появляющиеся уже в самом начале при обсуждении свойств натуральных чисел. Кроме того, мы приводим разнообразные примеры, для того чтобы изучающий мог прочувствовать, как именно и для каких задач применяется тот или иной метод доказательств или алгоритм счета. Мы приводим также ошибочные доказательства и анализируем ошибки и их причины в доказательствах, имеющихся в математической литературе.

Отметим, что в наше время, по крайней мере, среди студентов-педагогов, но, к сожалению, и не только среди них, господствует мнение, что едва научившись чему-нибудь, человек может учить другого человека. Однако в более ранние времена развития человеческой цивилизации люди знали, что для того, чтобы из ученика превратиться в Учителя, необходимо проделать большой путь. Об этом свидетельствует и эпиграф М. Монтеня, приведенный в начале работы. Мне неоднократно доводилось слышать мнение, что все, чему учат в вузе, в частности в курсе алгебры, не нужно школьному учителю. К такому выводу студенты приходили, наблюдая работу своего собственного учителя и исходя из собственного опыта изучения математики в школе. Хотелось бы отметить, что ученик знает далеко не все о работе учителя, часть работы школьного учителя остается скрытой от его учеников. Например, учителю приходится решать задачи повышенной сложности на олимпиадах. Хороший школьный учитель должен быстро ориентироваться в вопросах, задаваемых учениками, среди которых могут оказаться и ученики, способности которых сравнимы, а иногда и превосходят способности самого учителя. Кроме того, при проверке домашних работ более квалифицированный учитель будет быстрее видеть, находить и

качественнее исправлять ошибки своих учеников.

В первой главе мы обращаемся к числам, с которыми ребенок сталкивается уже до того, как приходит в школу, то есть к натуральным числам. Подробно останавливаемся на методе доказательства по индукции. Во второй главе мы рассматриваем теорию делимости для натуральных чисел.

Третья глава посвящена комплексным числам. В ней подробно рассматривается запись комплексного числа в алгебраической и тригонометрической форме, а также действия с числами, заданными в тригонометрической форме. Приводятся примеры применения комплексных чисел для вычисления тригонометрических выражений и решения геометрических задач.

В четвертой главе мы обращаемся к уравнениям третьей и четвертой степени и приводим более проработанные формулы для вычисления корней уравнения в различных частных случаях. В случае кратных корней, например, формулы вычисления корней могут быть очень просто выражены через коэффициенты уравнения: если $x^3 + px + q = 0$, то корни уравнения в случае, когда

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, можно записать так: $x_1 = \frac{3q}{p}, x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p}$.

Первая и вторая главы имеют в своем составе раздел «Упражнения», в котором мы приводим примеры задач разного уровня сложности для того, чтобы их можно было использовать и школьному учителю, работающему, например, в классах с углубленным изучением математики или ведущему факультативные занятия. Для обеспечения самостоятельных и контрольных работ, в том числе и работ, выполняемых дома, приводятся индивидуальные задания для студентов.

Глава 1. Натуральные числа

Первыми числами, с которыми ребенок встречается в своей жизни, являются натуральные числа. К натуральным числам относятся числа $1, 2, \dots$. Научаются складывать и вычитать, затем умножать и делить натуральные числа. Отметим, что операции сложения и умножения выполнимы для любых натуральных чисел, а операции вычитания и деления можно выполнить не всегда. Разность $2 - 3$ не является натуральным числом. Этот факт может служить источником ошибок в рассуждениях, связанных с натуральными числами, когда мы используем, например, число $n - 2$, невольно считая, что оно натуральное. Это, конечно, верно, но только для натуральных чисел n, начиная с трех.

Число 6 можно разделить на 3 и получить частное 2, являющееся натуральным числом, но нельзя подобрать натуральное число q так, чтобы выполнялось равенство $6 = 4q$, или, по-другому, число 6 нельзя разделить (нацело) на число 4. Поэтому вопросы делимости занимают особое место при изучении натуральных (и целых) чисел и обсуждаются в разделе «Теория делимости».

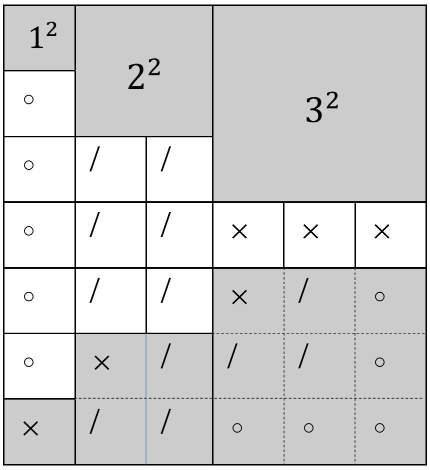
Множество всех натуральных чисел мы будем обозначать символом $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}^{+}$.

При доказательстве различных теорем, касающихся натуральных чисел, мы часто будем пользоваться методом доказательства, который называется методом математической индукции. Он позволяет доказывать разнообразные утверждения, справедливые для всех натуральных чисел. Первой рассматриваемой нами задачей, где возникает такая необходимость, будет задача, решать которую умели в древнем Вавилоне. Назовем эту задачу Вавилонской задачей.

Вавилонская задача

Рассмотрим задачу нахождения суммы квадратов последовательных натуральных чисел, то есть попытаемся угадать формулу для нахождения числа $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

В древнем Вавилоне для этого пользовались рисунком, похожим на приведенный ниже. На этом рисунке в верхней части имеется три квадрата серого цвета со сторонами, равными $1, 2$ и 3. Их общая площадь равна числу $1^2 + 2^2 + 3^2$.



В прямоугольнике высотой 7 единиц и шириной 6 единиц располагаются три фигуры, имеющие одинаковую площадь, а именно площадь, равную $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$. Таким образом, $3S_3 = (1 + 2 + 3) \cdot (2 \cdot 3 + 1)$.

Задача. Нарисуйте похожую фигуру для суммы $S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ и убедитесь, что снова получится три одинаковых по площади фигуры, причем на этот раз равенство примет вид:

$$3S_4 = (1 + 2 + 3 + 4) \cdot (2 \cdot 4 + 1).$$

Возникает гипотеза, что в общем случае ответ будет формироваться похожим образом, то есть справедливо равенство $3S_n = (1 + 2 + \cdots + n) \cdot (2n + 1)$. Учтем, что мы умеем вычислять сумму арифметической прогрессии $1 + 2 + \cdots + n$. Она равна $\frac{n(n+1)}{2}$, и мы получаем равенство

$$3S_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (2n+1).$$

Выразим S_n из этого равенства: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Мы могли бы считать после этого задачу полностью решенной, если бы не следующее обстоятельство. В истории математики неоднократно случалось так, что рассуждая подобным образом, математики приходили к неверным утверждениям. Приведем несколько примеров.

- Гипотеза: число вида $n^2 + n + 41$ является простым. Если мы будем подставлять числа от 1 до 39 включительно, мы будем все время получать простые числа. Это обнаружил Леонард Эйлер, к которому восходит этот пример. Однако гипотеза все же неверна. Для числа $n = 40$ мы получим составное число, делящееся на 41:
  $n^2 + n + 41 = 40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41.$
- Другой пример. Математик Д.А. Граве предположил, что числа вида $2^{p-1} - 1$, где p – простое число, не делятся на p^2. Он проверил свою гипотезу для простых чисел, меньших тысячи. Оказалось, однако, что для простого числа $p = 1093$ число $2^{1092} - 1$ делится на число 1093^2.

Таким образом, мы не можем гарантировать верность какого-либо утверждения, касающегося бесконечного множества простых чисел, наблюдая справедливость этого утверждения для большого числа частных случаев. Возникает необходимость привести рассуждение (доказательство), которое гарантировало бы нас от подобного рода ошибок.

Таким рассуждением является метод доказательства по индукции (метод математической индукции). Само слово индукция происходит от латинского слова inductio — наведение — форма мысли, в которой осуществляется переход от частного знания к более общему.

В логике так называют умозаключение, позволяющее из наличия какого-либо признака у части предметов данного класса делать вывод о присутствии этого признака у всех его предметов.

Метод математической индукции

Интуитивно ясно, что любое множество натуральных чисел может содержать сколь угодно большие натуральные числа, однако в любом таком множестве найдется самое маленькое (по-другому, наименьшее) натуральное число. Этот факт позволяет доказывать утверждения, справедливые для всех натуральных чисел следующим образом.

Пусть требуется доказать*, что утверждение* $A(k)$ *верно для любого натурального числа* k. Мы утверждаем, что можно доказывать это следующим образом.

1. (База индукции.) Проверить, что верно утверждение $A(1)$.
2. (Индукционный переход.) Предположить, что утверждение $A(n)$ верно и проверить, что верно утверждение $A(n+1)$, где n – любое натуральное число.

Если доказаны утверждения 1 и 2, то утверждение $A(k)$ верно для любого натурального числа k.

Последнее утверждение носит название «аксиома индукции». Что позволяет нам считать, что аксиома индукции верна? Если изобразить натуральные числа на числовой прямой, то они образуют множество, для которого левее любой его точки есть лишь конечное число натуральных чисел. Отсюда видно, что в любом множестве натуральных чисел есть наименьшее число, то есть число, левее которого нет элементов данного множества. Приведем рассуждение, которое позволяет понять, почему метод доказательства, приведенный выше, который называется методом математической индукции, верен.

Шеина Галина Валентиновна

Теория и практика решения задач по алгебре. Часть 1

Учебное пособие

Управление издательской деятельности

и инновационного проектирования МПГУ

119571 Москва, Вернадского пр-т, д. 88, оф. 446

Тел.:(499) 730-38-61

E-mail: izdat@mpgu.edu

Подписано в печать 04.07.2016 г.

Формат 60x90/16. Объем 6,62 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ № 522.

ISBN 978-5-4263-0350-8

9 785426 303508