

# ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНОЙ



№ 2

ДРЕВНЕРУССКИЕ ЛОВУШКИ

февраль  
2018

ЧАСОВАЯ  
БИСЕКТРИСА

ДИСКИ  
НА КОЛЁСАХ

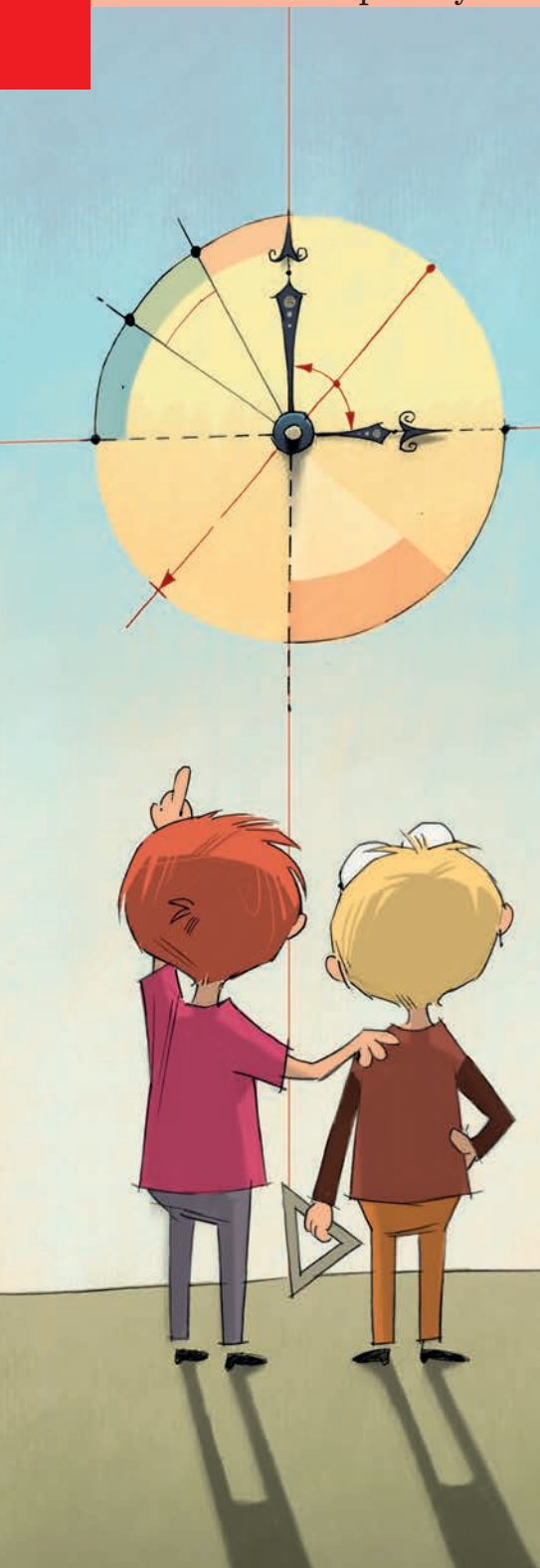
Enter ↵



■	ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ	
	<b>Часовая биссектриса.</b> <i>И. Акулич</i>	<b>2</b>
	<b>Путешествие №9 по зоопарку элементов: ниобий, молибден, технеций, рутений, родий.</b> <i>Б. Дружинин</i>	<b>18</b>
■	ОПЫТЫ И ЭКСПЕРИМЕНТЫ	
	<b>Повторяем опыт Гаспаро Берти.</b> <i>А. Андреев, А. Панов</i>	<b>6</b>
■	ЧУДЕСА ЛИНГВИСТИКИ	
	<b>Древнерусские ловушки.</b> <i>О. Кузнецова</i>	<b>10</b>
■	СВОИМИ РУКАМИ	
	<b>Геометрические забавы с бумажным квадратом.</b> <i>Н. Авилов</i>	<b>12</b>
■	ЗАДАЧИ В КАРТИНКАХ	
	<b>Грузинские монеты.</b> <i>М. Гельфанд</i>	<b>16</b>
	<b>Свет на занавеске.</b> <i>А. Бердников</i>	<b>26</b>
	<b>Диски на колёсах.</b> <i>А. Бердников</i>	<b>IV с. обложки</b>
■	ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ	
	<b>Двухслойные пироги.</b> <i>В. Красноухов</i>	<b>22</b>
■	ОЛИМПИАДЫ	
	<b>LXXXIV Санкт-Петербургская олимпиада по математике: избранные задачи I тура</b>	<b>24</b>
	<b>Наш конкурс</b>	<b>32</b>
■	ОТВЕТЫ	
	<b>Ответы, указания, решения</b>	<b>27</b>



## Часовая биссектриса



– Даня! Давай-ка проверим твою память!  
 – Давай, Федя. Если это не больно.  
 – Помнишь ли ты задачу про стрелки часов, в которой использовалась медиана треугольника?  
 – Ещё бы – помню, конечно<sup>1</sup>.  
 – Но ведь в треугольнике бывают не только медианы. А биссектрисы чем хуже?  
 – Подумать надо. Наверно, ничем. Разве что по мелочам...  
 – Вот именно. Поэтому вот тебе задача про *часовую биссектрису*<sup>2</sup>:

**Сколько раз в сутки хотя бы одна из трёх стрелок правильно идущих часов является биссектрисой угла, образованного двумя другими стрелками?**

– И всего-то? Да мы с тобой такого типа задачи как орехи щёлкаем! Даже как семечки.

– Так попробуй.

– Пожалуйста. Прежде всего, понятно, что можно рассмотреть не суточный, а полусуточный интервал времени, а потом результат удвоить – ведь в 12:00 все три стрелки занимают то же положение, что и в 00:00. Далее, как обычно в таких случаях, полный оборот обозначим за единицу. Тогда часовая стрелка может пройти путь  $x$ , где  $x$  лежит в пределах от 0 до 1. Стоп, нехорошо получается! Если мы берём строго полусуточный интервал, то надо исключить один из концов. Какой? Наверно, всё равно, но пусть – начальный. Итак,  $0 < x \leq 1$ , то есть  $x$  – строго положительное число, не превышающее 1. Теперь порядок!

Есть, конечно, три варианта – в зависимости от того, какая именно стрелка является биссектрисой. Пусть сначала часовая стрелка есть биссектриса угла между минутной и секундной стрелками. Если часовая стрелка прошла путь  $x$ , то минутная продвинулась на  $12x$ , а секундная – на  $720x$ . Как же «оформить» эту биссектрису? Чего молчишь – подсказывай!

– А не зафиксировать ли часовую стрелку? Свяжем с ней систему отсчёта. Тогда она становится как бы

<sup>1</sup>Статья «Часовая медиана», «Квантик» № 8 за 2015 г.

<sup>2</sup>Автор задачи неизвестен.

неподвижной – допустим, вертикальной (и пройденный ею путь равен нулю), зато остальные две прошли по кругу расстояния, равные  $11x$  и  $719x$ . И если часовая стрелка – биссектриса, то получается, что угол, на который *отошла* одна из двух остальных стрелок от вертикали, равен углу, на который *не дошла* вторая стрелка до вертикали. Только вот как определить эти углы?..

– А не надо их определять. И вообще, мне твои подсказки не нужны – сам справлюсь!

Заметь, что суммарно пути, пройденные минутной и секундной стрелками, дают целое число оборотов – равные углы отклонения от вертикали друг друга компенсируют. И наоборот – если суммарно число оборотов целое, то углы отклонения равны (ведь оба они меньше оборота и иначе друг друга не компенсируют). Дальше трудностей не видно: надо лишь выяснить, при каких положительных  $x$ , не превышающих 1, сумма  $719x + 11x = 730x$  – целое число. Понятно, что  $x$  может быть любой из дробей:  $\frac{1}{730}, \frac{2}{730}, \dots, \frac{730}{730}$ , и всего таких дробей ровно 730 штук. Вот так – треть задачи решена. Есть возражения?

– Вроде нет. Продолжай.

– Хорошо. Пусть теперь биссектрисой является минутная стрелка. Фиксируем её. Тогда часовая и секундная стрелки прошли пути  $-11x$  (ишь ты – отрицательное число, то есть как бы крутится в обратную сторону) и  $708x$ . Снова получаем, что их сумма  $697x$  – целое. Вот ещё 697 моментов времени. Наконец, если биссектриса – секундная стрелка, то целым числом должно быть... один момент... вот –  $1427x$ . Ещё 1427 решений. Всего же выходит  $730 + 697 + 1427 = 2854$ . Именно столько раз за половину суток одна из стрелок является биссектрисой между двумя другими!

– Ошибаешься. Ведь в 12:00 *каждая* из стрелок есть биссектриса, а момент-то один и тот же!

– Да, верно. Упустил. Значит, надо вычесть 2. Получаем за полусутки 2852 момента, а за целые сутки – вдвое больше, то есть 5704. Хотя... а вдруг ещё есть такие «кратные совпадения»?

