П. А. Крылов, А. А. Туганбаев

Кольца формальных матриц и модули над ними

МЦНМО

УДК 512
ББК 22.14
К85

Крылов П. А., Туганбаев А. А.
Кольца формальных матриц и модули над ними.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
190 с.
ISBN 978-5-4439-3115-9

Данная книга является первой, где систематически изучаются формальные матрицы. Элементы этих матриц принадлежат нескольким (в общем случае разным) кольцам и бимодулям. Частным случаем формальных матриц второго порядка являются контексты Мориты, поначалу предназначавшиеся для описания эквивалентностей между категориями модулей. Они также очень удобны для переноса свойств с одного кольца на другое. Существуют аналоги контекстов Мориты для полуколец, хопфовых и квазихопфовых алгебр, коколец и категорий. Формальные матрицы весьма полезны для построения колец с односторонними несимметричными свойствами. Подробно исследуются инъективные, плоские, проективные и наследственные модули над кольцами формальных матриц. Вводится и изучается понятие определителя формальной матрицы над коммутативным кольцом. Его свойства могут отличаться в некоторых случаях от свойств обычного определителя. Также группы Гротендика и Уайтхеда кольца формальных матриц выражаются через соответствующие группы колец с главной диагонали.

Подготовлено на основе книги:
Крылов П. А., Туганбаев А. А. Кольца формальных матриц и модули над ними. — М.: МЦНМО, 2017. — 192 с. ISBN 978-5-4439-1115-1.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3115-9

Содержание

Глава 1

Кольца формальных матриц

Определяются кольца формальных матриц порядка 2 и произвольного порядка n, рассматриваются их основные свойства, приводятся примеры таких колец, указываются связи колец формальных матриц с кольцами эндоморфизмов модулей и системами ортогональных идемпотентов колец.

Вычисляются радикал Джекобсона и первичный радикал кольца формальных матриц. Выясняется, когда кольцо формальных матриц артиново, нётерово, имеет стабильный ранг 1, регулярно или обратимо-регулярно.

Последний параграф 6 посвящён чистым и k-хорошим матричным кольцам.

§ 1. Построение колец формальных матриц порядка 2

Пусть даны два кольца R и S, R-S-бимодуль M и S-R-бимодуль N. Обозначим через K множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}, \quad \text{где } r \in R,\ s \in S,\ m \in M,\ n \in N.$$

Относительно матричного сложения K является абелевой группой. Чтобы превратить K в кольцо, нужно уметь вычислять «произведение» $mn \in R$ и «произведение» $nm \in S$. Корректно это можно сделать следующим образом.

Предположим, что даны бимодульные гомоморфизмы $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$. Полагаем $\varphi(m \otimes n) = mn$ и $\psi(n \otimes m) = nm$ для всех $m \in M$ и $n \in N$. Теперь матрицы из K можно умножать, как в обычном кольце матриц:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ n_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr_1 + mn_1 & rm_1 + ms_1 \\ nr_1 + sn_1 & nm_1 + ss_1 \end{pmatrix},$$

$$r, r_1 \in R, \quad s, s_1 \in S, \quad m, m_1 \in M, \quad n, n_1 \in N.$$

Уточним, что rm_1, ms_1, nr_1, sn_1 — это соответствующие модульные произведения. Пусть также для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполнены равенства ассоциативности $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$. Тогда относительно указанных операций сложения и умножения K является кольцом. При проверке аксиом кольца нужно также учесть основные свойства тензорного произведения и бимодульность гомоморфизмов φ и ψ. Верно и обратное: если K — кольцо, то выполнены указанные соотношения ассоциативности. Кольцо K называется *кольцом формальных матриц* (порядка 2) и обозначается через $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. Используется также термин *кольцо обобщённых матриц*. Иногда мы будем просто писать «кольцо матриц».

Если $N = 0$ или $M = 0$, то K — *кольцо формальных верхних или нижних треугольных матриц*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix} \quad \text{соответственно.}$$

Для его задания гомоморфизмы φ и ψ не нужны.

Образы I и J гомоморфизмов φ и ψ являются идеалами колец R и S соответственно. Они называются *идеалами следа* кольца K. Будем говорить, что K — *кольцо с нулевыми идеалами следа* или *тривиальное* кольцо, в случае, когда $\varphi = 0 = \psi$, то есть $I = 0 = J$. Конечно, кольцо формальных треугольных матриц является кольцом с нулевыми идеалами следа.

Договоримся через MN (соответственно NM) обозначать множество всех конечных сумм элементов вида mn (соответственно nm). Выполнены равенства

$$I = MN, \quad J = NM, \quad IM = MJ, \quad NI = JN.$$

Как правильно сформулировать проблему изучения колец формальных матриц? Под изучением кольца $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ естественно понимать выяснение того, как свойства этого кольца зависят от свойств колец R и S, бимодулей M и N, гомоморфизмов φ и ψ.

Иногда удобно отождествлять матрицы с соответствующими элементами. Например, матрицу $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ можно отождествлять с элементом $r \in R$ и т. п. Аналогичные соглашения принимаются для множеств матриц. Например, множество матриц $\left(\begin{smallmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ записывается в виде (X, Y) (или просто X при $Y = 0$). Аналогичные правила действуют для матриц с нулевой верхней строкой.

Пусть T — некоторое кольцо. Сохраним в T прежнее сложение и определим новое умножение $\circ$ формулой $x \circ y = yx$, $x, y \in T$. В результате мы получим новое кольцо T°, называемое *противоположным* к T. Непосредственно проверяется, что противоположное кольцо к $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ изоморфно кольцу формальных матриц $\begin{pmatrix} R^\circ & N \\ M & S^\circ \end{pmatrix}$, где N рассматривается как R°-S°-бимодуль, а M рассматривается как S°-R°-бимодуль. Попутно заметим, что

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} S & N \\ M & R \end{pmatrix}.$$

Если V — правый T-модуль, то соотношение $tv = vt$, $t \in T$, $v \in V$, задаёт на V структуру левого T°-модуля, и наоборот.

Если $M = 0 = N$, то кольцо K можно отождествить с прямым произведением $R \times S$. Обычно мы считаем, что произведение $R \times S$ — кольцо матриц.

Пусть K — некоторое кольцо $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ формальных матриц. Используя соглашение о записях матриц, можно записать равенство

$$K = \begin{pmatrix} eKe & eK(1-e) \\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При таком подходе действие соответствующих гомоморфизмов φ и ψ совпадает с умножением в кольце K.

В определённом смысле верно обратное. Именно, пусть абстрактное кольцо T содержит идемпотент e, не равный нулю или единице. Можно образовать кольцо формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} eTe & eT(1-e) \\ (1-e)Te & (1-e)T(1-e) \end{pmatrix}.$$

Кольца T и K изоморфны. Соответствие

$$t \to \begin{pmatrix} ete & et(1-e) \\ (1-e)te & (1-e)t(1-e) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

задаёт соответствующий изоморфизм.

Пусть K — некоторое кольцо формальных матриц, записанное в виде (1). Нетрудно указать строение идеалов и факторколец кольца K (см. также окончание § 4 и предложения 17.3 и 17.4).

Если L — некоторый идеал кольца K, то непосредственно проверяется, что L совпадает с множеством матриц

$$\begin{pmatrix} eLe & eL(1-e) \\ (1-e)Le & (1-e)L(1-e) \end{pmatrix},$$

где eLe и $(1-e)L(1-e)$ — идеалы колец R и S соответственно, $eL(1-e)$ и $(1-e)Le$ — подбимодули в M и N соответственно. Подгруппы, находящиеся в одной из четырёх позиций в L, совпадают с множествами соответствующих компонент элементов из L.

Образуем группу матриц $\overline{K}$:

$$\begin{pmatrix} eKe/eLe & eK(1-e)/eL(1-e) \\ (1-e)Ke/(1-e)Le & (1-e)K(1-e)/(1-e)L(1-e) \end{pmatrix}.$$

В действительности мы имеем кольцо формальных матриц $\overline{K}$, понимаемое в том широком смысле, о котором мы условились. Умножение матриц в $\overline{K}$ индуцируется умножением в K. Непосредственно проверяется, что отображение

$$K/L \to \overline{K}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} + L \to \begin{pmatrix} \bar{r} & \overline{m} \\ \bar{n} & \bar{s} \end{pmatrix},$$

является кольцевым изоморфизмом, где черта обозначает соответствующий смежный класс.

Конкретное кольцо формальных матриц определяется с помощью двух бимодульных гомоморфизмов φ и ψ. Выбор иной пары гомоморфизмов приводит в общем случае к другому кольцу. Можно сформулировать задачу о классификации колец формальных матриц в зависимости от соответствующих пар бимодульных гомоморфизмов. С этой задачей связана следующая **проблема изоморфизма**.

Пусть K и K_1 — два кольца формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами φ, ψ и φ_1, ψ_1 соответственно. Как должны быть связаны гомоморфизмы φ, ψ и φ_1, ψ_1, чтобы существовал изоморфизм $K \cong K_1$?

Насколько много колец формальных матриц? Из изложенного выше следует, что класс колец формальных матриц совпадает с классом колец, имеющих нетривиальные идемпотенты (если считать прямые произведения колец кольцами матриц).

Класс колец формальных матриц также совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму. Действительно, пусть $G = A \oplus B$ — правый модуль над некоторым кольцом T. Его кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End}_T A & \operatorname{Hom}_T(B, A) \\ \operatorname{Hom}_T(A, B) & \operatorname{End}_T B \end{pmatrix}$$

с обычными операциями сложения и умножения матриц (в качестве произведения гомоморфизмов берётся их композиция). И наоборот, для кольца $K = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ можно записать разложение

$$K_K = (R, M) \oplus (N, S)$$

в прямую сумму правых идеалов и убедиться, что кольцо $\mathrm{End}_K(K)$ изоморфно кольцу $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$.

Есть много видов колец, которые не обязательно имеют матричное происхождение, но являются близкими к кольцам формальных матриц. В частности, встречаются разнообразные кольца треугольных матриц. В работе [32] изучались так называемые *тривиальные расширения* колец, определяемые следующим образом. Если R — кольцо, а M — R-R-бимодуль, то обозначим через T прямую сумму абелевых групп R и M, $T = \{(r, m) \mid r \in R,\ m \in M\}$. Группа T становится кольцом, если умножение задаётся правилом $(r, m)(r_1, m_1) = (rr_1, rm_1 + mr_1)$. Это кольцо и является тривиальным расширением кольца R с помощью бимодуля M.

Рассмотрим теперь кольцо треугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ и в нём подкольцо $\Gamma = \{\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \mid r \in R,\ m \in M\}$. Кольца T и Γ изоморфны при соответствии $(r, m) \to \left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, тривиальные расширения состоят из треугольных матриц.

Любое кольцо формальных треугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ является тривиальным расширением. Действительно, M можно рассматривать как $(R \times S)$-$(R \times S)$-бимодуль, считая, что $(r, s)m = rm$, $m(r, s) = ms$. Возьмём тривиальное расширение $T = \{((r, s), m) \mid r \in R,\ s \in S,\ m \in M\}$ кольца $R \times S$. Соответствие $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) \to ((r, s), m)$ задаёт изоморфизм колец K и T. Впрочем, имеется класс колец треугольных матриц, содержащий тривиальные расширения. Пусть $f : R \to S$ — кольцевой гомоморфизм. Тогда в кольце $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ все матрицы вида $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & f(r) \end{smallmatrix}\right)$ образуют подкольцо.

Приведём более общую конструкцию расширения колец (см. [87]). Пусть снова M — R-R-бимодуль, а $\Phi : M \otimes_R M \to R$ — некоторый R-R-бимодульный гомоморфизм. Определим умножение в $R \oplus M$ правилом

$$(r, m)(r_1, m_1) = (rr_1 + \Phi(m \otimes m_1), rm_1 + mr_1).$$

Это умножение ассоциативно в точности тогда, когда

$$\Phi(m \otimes m_1)m_2 = m\,\Phi(m_1 \otimes m_2) \tag{2}$$

для всех $m, m_1, m_2 \in M$. В таком случае $R \oplus M$ является кольцом. Это кольцо обозначается $R \times_\Phi M$ и называется *полутривиальным расширением* кольца R с помощью M и Φ.

Кольца формальных матриц являются полутривиальными расширениями. Пусть $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами φ и ψ. Обозначим $T=R\times S$, $V=M\times N$ и рассмотрим V как естественный T-T-бимодуль. Через Φ обозначим T-T-бимодульный гомоморфизм

$$(\varphi,\psi)\colon V\otimes_T V\to T.$$

Он удовлетворяет соответствующему равенству (2). Следовательно, имеем полутривиальное расширение $T\times_\Phi V$. Кольца $T\times_\Phi V$ и $\left(\begin{smallmatrix} R & M\\ N & S\end{smallmatrix}\right)$ изоморфны при соответствии

$$(r,s)+(m,n)\to\begin{pmatrix} r & m\\ n & s\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, любое полутривиальное расширение вкладывается в подходящее кольцо формальных матриц. В самом деле, пусть $T\times_\Phi V$ — полутривиальное расширение. Равенство, соответствующее (2), означает, что существует кольцо формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} T & V\\ V & T\end{smallmatrix}\right)$. Его бимодульные гомоморфизмы совпадают с Φ. Отображение

$$T\times_\Phi V\to\begin{pmatrix} T & V\\ V & T\end{pmatrix},\quad (t,v)\to\begin{pmatrix} t & v\\ v & t\end{pmatrix},$$

является вложением колец. Таким образом, можно отождествить $T\times_\Phi V$ с кольцом матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} t & v\\ v & t\end{smallmatrix}\right)$.

Пусть T — некоторое коммутативное кольцо. Если кольца R и S являются T-алгебрами, то кольцо $K=\left(\begin{smallmatrix} R & M\\ N & S\end{smallmatrix}\right)$ также является T-алгеброй. В этом случае говорят, что K — *алгебра формальных матриц*.

§ 2. Примеры колец формальных матриц порядка 2

Приведём примеры колец формальных матриц.

1. Пусть M — правый модуль над некоторым кольцом S, $R=\operatorname{End}_S M$, $M^*=\operatorname{Hom}_S(M,S)$. Тогда M — R-S-бимодуль и M^* — S-R-бимодуль, где

$$(s\alpha)m=s\alpha(m),\quad (\alpha r)m=\alpha(r(m)),$$
$$\alpha\in M^*,\quad s\in S,\quad r\in R,\quad m\in M.$$

Существуют R-R-бимодульный гомоморфизм $\varphi\colon M\otimes_S M^*\to R$ и S-S-бимодульный гомоморфизм $\psi\colon M^*\otimes_R M\to S$, определяемые правилами

$$\Big(\varphi\Big(\sum m_i\otimes\alpha_i\Big)\Big)(m)=\sum m_i\alpha_i(m),\quad \psi\Big(\sum\alpha_i\otimes m_i\Big)=\sum\alpha_i(m_i),$$

где $m_i, m\in M$ и $\alpha_i\in M^*$. Для φ и ψ выполняются два закона ассоциативности. Следовательно, получаем кольцо матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M\\ M^* & S\end{smallmatrix}\right)$.

2. Пусть X и Y — левый и правый идеалы кольца R соответственно. Далее, пусть S — любое подкольцо в R, удовлетворяющее условию $YX \subseteq S \subseteq X \cap Y$. Тогда $\left(\begin{smallmatrix} R & X \\ Y & S \end{smallmatrix}\right)$ — кольцо формальных матриц, для которого действия отображений φ и ψ сводятся к умножению в R. В качестве специального случая получаем кольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & Re \\ eR & eRe \end{smallmatrix}\right)$, где e — некоторый идемпотент.

3. Пусть Y — правый идеал кольца R, и пусть S — любое подкольцо в R, которое содержит Y в качестве идеала. Тогда S называется *подыдеализатором* идеала Y в R и $\left(\begin{smallmatrix} R & R \\ Y & S \end{smallmatrix}\right)$ является кольцом формальных матриц.

4. Кольца эндоморфизмов абелевых групп. Если абелева группа G является прямой суммой, $G = A \oplus B$, то её кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} G$ будет кольцом формальных матриц; см. § 1. Абелевы группы предоставляют много интересных и полезных примеров колец формальных матриц. Прежде всего, это кольца треугольных матриц. Так, кольца эндоморфизмов групп $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}$ изоморфны кольцам

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{Z}}_p & A_p \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

соответственно, где $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, A_p — поле p-адических чисел.

Кольцо эндоморфизмов p-группы $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(p^m)$, $n < m$, является содержательной иллюстрацией к понятию кольца формальных матриц. Его можно отождествить с кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^m} \end{pmatrix}.$$

Обозначим это кольцо через K или $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$.

Как умножаются матрицы в кольце K? Прежде всего заметим, что $\mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{Z}_{p^m}/(p^{m-n} \cdot 1)$. Поэтому кольца R и S действуют на M и N обычным, единственно возможным способом. Далее, перейдём к гомоморфизмам $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$. Если рассмотреть K как исходное кольцо эндоморфизмов, то действие φ и ψ сведётся к композиции соответствующих гомоморфизмов. Принимая это во внимание, приходим к следующему. Если $\bar{a} \in M$ и $\bar{b} \in N$, где черта обозначает класс вычетов, то

$$\varphi(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \bar{a} \circ \bar{b} = p^{m-n} \bar{a}\bar{b}.$$

Далее, имеем

$$\psi(\bar{b} \otimes \bar{a}) = \bar{b} \circ \bar{a} = p^{m-n} \bar{b}\bar{a},$$

где последние символы $\bar{b}$ и $\bar{a}$ обозначают классы вычетов в $\mathbb{Z}_{p^m}$ с представителями b и a.

Получается, что идеалы следа I и J кольца K равны идеалу $(p^{m-n}\cdot 1)$ кольца $\mathbb{Z}_{p^n}$ и идеалу $(p^{m-n}\cdot 1)$ кольца $\mathbb{Z}_{p^m}$ соответственно. Отсюда следует, что $I\subseteq J(R)$ и $J\subseteq J(S)$. Существует сюръективный гомоморфизм $e\colon S\to R$, $e(\bar{y})=\bar{y}$, $\bar{y}\in S$. Кроме того, $\mathrm{Ker}(e)\subseteq J(S)$, и верно равенство $e(\bar{b}\circ\bar{a})=\bar{a}\circ\bar{b}$.

В работе [25] детально рассматривается случай $n=1$ и $m=2$. Найдены все обратимые матрицы кольца K. Это используется для построения криптосистемы.

5. Полные кольца матриц. Пусть R — некоторое кольцо. Полное кольцо матриц $M(n,R)$ может быть представлено в виде кольца формальных матриц порядка 2

$$M(n,R)=\begin{pmatrix} R & M(1\times(n-1),R)\\ M((n-1)\times 1,R) & M(n-1,R)\end{pmatrix}.$$

Это кольцо даёт пример кольца блочных матриц. Более общая ситуация появится в доказательстве предложения 3.3 и в первом абзаце после этого доказательства.

6. (См. [26].) Пусть R — кольцо, G — конечная подгруппа группы автоморфизмов кольца R, а R^G — кольцо инвариантов кольца R, т. е. R^G — подкольцо $\{x\in R\mid x^g=x$ для всех $g\in G\}$. Рассмотрим косое групповое кольцо $R*G$, состоящее из всех формальных сумм вида

$$\sum_{g\in G} r_g g,\quad r_g\in R.$$

Суммы складываются покомпонентно, при умножении используются закон дистрибутивности и соотношение

$$rg\cdot sh=rs^{g^{-1}}gh$$

для всех $r,s\in R$ и $g,h\in G$. Ясно, что R является левым и правым R^G-модулем. Можно также рассматривать R как левый и правый $R*G$-модуль следующим образом: для любых элементов $x=\sum_{g\in G} r_g g\in R*G$ и $r\in R$ полагаем

$$x\cdot r=\sum_{g\in G} r_g r^{g^{-1}},\quad r\cdot x=\sum_{g\in G}(rr_g)^g.$$

Отображения

$$\varphi\colon R\otimes_{R*G}R\to R^G\quad \text{и}\quad \psi\colon R\otimes_{R^G}R\to R*G$$

определяются с помощью соотношений

$$\varphi(x \otimes y) = \sum_{g \in G} (xy)^g \quad \text{и} \quad \psi(y \otimes x) = \sum_{g \in G} yx^{g^{-1}} g$$

соответственно.

Два условия ассоциативности выполняются, и в итоге получаем кольцо

$$\begin{pmatrix} R^G & R \\ R & R * G \end{pmatrix}.$$

§ 3. Кольца формальных матриц порядка $n \geqslant 2$

Приведём ряд замечаний о кольцах формальных матриц произвольного порядка n. Рассмотренный в § 1 случай $n = 2$ достаточен для понимания того, как надо определять такие кольца.

Фиксируем натуральное число $n \geqslant 2$. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — кольца, а M_{ij} — R_i-R_j-бимодули, причём $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предположим, что для любых таких $i, j, k = 1, \ldots, n$, что $i \neq j$, $j \neq k$, задан R_i-R_k-бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk} \colon M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}.$$

Для индексов $i = j$ и $j = k$ считаем, что φ_{iik} и φ_{ikk} — это канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \to M_{ik}, \quad M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \to M_{ij}.$$

Вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ пишем $a \circ b$ или просто ab. Допустим также, что в этих обозначениях $(ab)c = a(bc)$ для всех элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$, $c \in M_{k\ell}$ и индексов i, j, k, ℓ.

Обозначим через K множество всех матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij}. Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K является кольцом. Его можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & R_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Говорят, что K — *кольцо формальных матриц порядка n*. Если $M_{ij} = 0$ для всех i, j, удовлетворяющих условию $i < j$ (соответственно $j < i$), то мы говорим, что имеется *кольцо формальных нижних* (соответственно *верхних*) *треугольных матриц*.

Для каждого $k=1,\ldots,n$ положим

$$I_k=\sum_{i\neq k}\mathrm{Im}(\varphi_{kik}),\quad \text{где } \varphi_{kik}\colon M_{ki}\otimes_{R_i}M_{ik}\to R_k,$$

или, по-другому, $I_k=\sum_{i\neq k}M_{ki}M_{ik}$, где $M_{ki}M_{ik}$ — множество всех конечных сумм элементов вида ab, $a\in M_{ki}$, $b\in M_{ik}$. Тогда I_k — идеал кольца R_k. Назовём эти идеалы $I_1,\ldots,I_n$ *идеалами следа* кольца K.

Для лучшего понимания строения колец формальных матриц проясним их связь с идемпотентами и кольцами эндоморфизмов.

Предложение 3.1. *Некоторое кольцо K является кольцом формальных матриц порядка $n\geqslant 2$ в точности тогда, когда в K существует полная ортогональная система из n ненулевых идемпотентов.*

Доказательство. Если K — кольцо формальных матриц порядка n, то матричные единицы $E_{11},\ldots,E_{nn}$ (см. § 16) образуют нужную систему идемпотентов кольца K.

Обратно, если $\{e_1,\ldots,e_n\}$ — полная ортогональная система ненулевых идемпотентов некоторого кольца T, то T изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} e_1Te_1 & e_1Te_2 & \ldots & e_1Te_n\\ e_2Te_1 & e_2Te_2 & \ldots & e_2Te_n\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ e_nTe_1 & e_nTe_2 & \ldots & e_nTe_n\end{pmatrix};$$

в связи с таким кольцом см. § 1. □

Случай прямых сумм двух модулей, рассмотренный в § 1, можно перенести на прямые суммы любого конечного числа слагаемых.

Предложение 3.2. *Класс колец формальных матриц порядка n совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму n ненулевых слагаемых.*

В конкретных задачах могут появляться кольца формальных матриц любого порядка n. В общей теории обычно изучаются кольца формальных матриц порядка 2 в основном по причине технического удобства. Случай $n>2$ иногда можно в определённом смысле свести к случаю матриц порядка 2.

Предложение 3.3. *Кольцо формальных матриц порядка $n>2$ изоморфно некоторому кольцу формальных матриц порядка k для каждого $k=2,\ldots,n-1$.*

Доказательство. Утверждение становится вполне понятным, если рассмотреть представление колец матриц с помощью идемпотентов или колец эндоморфизмов; см. предложения 3.1 и 3.2. Достаточно определённым образом «укрупнять» идемпотенты или прямые слагаемые. Есть, конечно, и прямое доказательство. Например, возьмём $k=2$. Введём следующие обозначения для множеств матриц. Положим $R = R_1$, $M = (M_{12}, \ldots, M_{1n})$,

$$N = \begin{pmatrix} M_{21} \\ \vdots \\ M_{n1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} R_2 & M_{23} & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n2} & M_{n3} & \ldots & R_n \end{pmatrix}.$$

Здесь S — кольцо формальных матриц порядка $n-1$, M — R-S-бимодуль, N — S-R-бимодуль, причём модульные умножения определяются как произведения строк и столбцов на матрицы. Гомоморфизмы φ_{ijk}, задающие умножение в K, индуцируют бимодульные гомоморфизмы $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$. При этом верны два нужных закона ассоциативности. В результате имеем кольцо формальных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$ и изоморфизм $K \cong \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & S \end{smallmatrix}\right)$. Изоморфизм получается путём разбиения каждой матрицы на четыре блока:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (a_{11}) & (a_{12} \ldots a_{1n}) \\ \begin{pmatrix} a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

В доказательстве предложения мы фактически пришли к тому, что формальные матрицы можно, как и обычные, разбивать на блоки, т. е. представлять их в виде блочных матриц. Действия над блочными матрицами производятся по тем же правилам, что и в случае, когда вместо блоков имеем отдельные элементы. Умножение блочных матриц одного порядка всегда выполнимо, когда сомножители имеют одинаковые блочные разбиения.

Таким образом, любое кольцо формальных матриц можно рассматривать как кольцо (формальных) блочных матриц. Естественным образом появляются кольца блочных верхних (нижних) треугольных матриц. Кольца (формальных) блочных матриц используются в теории конечномерных алгебр. Естественным образом в этой теории, в частности, появляются кольца блочных треугольных матриц над полями; см. [9].

Существуют различные конструкции, позволяющие, наоборот, исходя из данного кольца формальных матриц строить кольца формальных матриц бóльшего порядка. Рассмотрим первый способ.

Пусть дано кольцо формальных матриц вида (3). Зафиксируем некоторую последовательность натуральных чисел $s_1, \ldots, s_n$. Обозначим через $\overline{M}_{ij}$ множество матриц размера $s_i \times s_j$ с элементами из M_{ij} (напомним, что $M_{ii} = R$). Далее, пусть $\overline{K}$ — множество всех блочных матриц $(\overline{M}_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$. Определим операции сложения и умножения этих матриц обычным образом, т. е. сложение покомпонентно, а относительно умножения заметим, что $A_{ij} \cdot A_{jk} \in \overline{M}_{ik}$ для любых матриц $A_{ij} \in \overline{M}_{ij}$, $A_{jk} \in \overline{M}_{jk}$. Тогда $\overline{K}$ превращается в кольцо формальных блочных матриц и одновременно $\overline{K}$ — кольцо формальных матриц порядка $s_1 + \ldots + s_n$.

В дальнейшем мы будем применять второй простой способ построения колец формальных матриц бóльшего порядка. Пусть дано кольцо формальных матриц порядка 2, $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$.

Покажем, что существует кольцо формальных матриц

$$K_4 = \begin{pmatrix} K & \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} \\ (N \quad S) & S \end{pmatrix}.$$

Прежде всего, $\begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix}$ естественным образом является K-S-бимодулем, а $(N \quad S)$ является S-K-бимодулем. Отображение

$$\varphi\colon \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} \otimes_S (N \quad S) \to K, \qquad \begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \otimes (n, y) \to \begin{pmatrix} mn & my \\ xn & xy \end{pmatrix},$$

является K-K-бимодульным гомоморфизмом, а отображение

$$\psi\colon (N \quad S) \otimes_K \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} \to S, \qquad (n, y) \otimes \begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \to nm + yx,$$

является S-S-бимодульным гомоморфизмом. Выполняются два известных тождества ассоциативности для φ и ψ из § 1. Следовательно, указанное кольцо K_4 существует. Таким же способом определяется кольцо

$$K_2 = \begin{pmatrix} K & \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix} \\ (R \quad M) & R \end{pmatrix}.$$

Теперь заметим, что наряду с кольцом K всегда имеется кольцо

$$L = \begin{pmatrix} S & N \\ M & R \end{pmatrix}.$$

Эти кольца изоморфны при соответствии

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} s & n \\ m & r \end{pmatrix}.$$

Поэтому вместе с кольцами K_4 и K_2 существуют кольца K_3 и K_1, изоморфные им. Впрочем, их можно построить и непосредственно.

Обратим на время внимание на кольца верхних треугольных матриц порядка 3 (они снова появятся в § 7). Такое кольцо Γ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix},$$

где R, S, T — кольца, M — R-S-бимодуль, L — R-T-бимодуль, N — S-T-бимодуль. Из бимодульных гомоморфизмов остаются ненулевыми только $M \otimes_S N \to L$ и естественные изоморфизмы вида $R \otimes_R M \to M$ и т. п. Можно двумя способами превратить Γ в кольцо треугольных матриц порядка 2. При первом способе

$$\begin{pmatrix} r & m & \ell \\ 0 & s & n \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \ell \\ n \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 0) & (t) \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\left(\begin{smallmatrix} L \\ N \end{smallmatrix}\right)$ является $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$-$T$-бимодулем. При втором способе (M, L) — R-$\left(\begin{smallmatrix} S & N \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$-бимодуль.

§ 4. Некоторые идеалы колец формальных матриц

Найдём радикал Джекобсона и первичный радикал кольца формальных матриц порядка n. Сначала рассмотрим случай $n = 2$.

Пусть дано кольцо

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Определим четыре подбимодуля бимодулей M и N. Обозначим

$$J_\ell(M) = \{m \in M \mid Nm \subseteq J(S)\}, \quad J_r(M) = \{m \in M \mid mN \subseteq J(R)\},$$
$$J_\ell(N) = \{n \in N \mid Mn \subseteq J(R)\}, \quad J_r(N) = \{n \in N \mid nM \subseteq J(S)\}.$$

Теперь образуем следующие множества матриц:

$$J_\ell(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_\ell(M) \\ J_\ell(N) & J(S) \end{pmatrix}, \quad J_r(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_r(M) \\ J_r(N) & J(S) \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что получены левый и правый идеалы кольца K.

Теорема 4.1 [92]. *Верны равенства $J_\ell(K) = J(K) = J_r(K)$.*

Доказательство. Запишем
$$J(K)=\begin{pmatrix} X & B\\ C & Y\end{pmatrix},$$
где X и Y — идеалы колец R и S соответственно, B и C — подбимодули в M и N соответственно (см. § 1). Верны равенства
$$X=eJ(K)e=J(eKe)=J(R),\quad \text{где } e=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$
Аналогично получаем, что $Y=J(S)$. Далее, имеем
$$B\subseteq J_\ell(M)\cap J_r(M),\quad C\subseteq J_\ell(N)\cap J_r(N).$$
Доказано, что $J(K)\subseteq J_\ell(K)\cap J_r(K)$.

Теперь возьмём произвольную матрицу $\left(\begin{smallmatrix} r & m\\ n & s\end{smallmatrix}\right)$ в $J_r(K)$ и единичную матрицу E. Матрицы $E-\left(\begin{smallmatrix} r & m\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $E-\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ n & s\end{smallmatrix}\right)$ обратимы справа в K. Их правыми обратными будут матрицы $\left(\begin{smallmatrix} x & xm\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ yn & y\end{smallmatrix}\right)$ соответственно, где x и y — правые обратные к $1-r$ и $1-s$ соответственно. Следовательно, матрицы $\left(\begin{smallmatrix} r & m\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ n & s\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} r & m\\ n & s\end{smallmatrix}\right)$ лежат в $J(K)$. Поэтому $J_r(K)\subseteq J(K)$. Аналогично $J_\ell(K)\subseteq J(K)$. □

Получается, что $J_\ell(M)=J_r(M)$ и $J_\ell(N)=J_r(N)$. Будем обозначать эти идеалы через $J(M)$ и $J(N)$ соответственно. Таким образом, верно равенство
$$J(K)=\begin{pmatrix} J(R) & J(M)\\ J(N) & J(S)\end{pmatrix}.$$

Для произвольного кольца T пересечение всех его первичных идеалов называется *первичным радикалом* и обозначается через $P(T)$.

Хорошо известно, что первичный радикал кольца T совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов кольца T. Напомним, что элемент $a\in T$ называется *строго нильпотентным*, если все члены любой такой последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, что $a_0=a$, $a_{n+1}\in a_nTa_n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, равны нулю начиная с некоторого номера.

Определим идеалы $P_\ell(M)$, $P_r(M)$, $P_\ell(N)$ и $P_r(N)$, аналогичные идеалам $J_\ell(M)$, $J_r(M)$, $J_\ell(N)$ и $J_r(N)$ соответственно. Ограничимся «левосторонним» случаем. Обозначим
$$P_\ell(M)=\{m\in M\mid Nm\subseteq P(S)\},$$
$$P_r(M)=\{m\in M\mid mN\subseteq P(R)\}.$$
Далее, пусть
$$P_\ell(K)=\begin{pmatrix} P(R) & P_\ell(M)\\ P_\ell(N) & P(S)\end{pmatrix}.$$

Теорема 4.2 [92]. *Верны равенства* $P_\ell(K) = P(K) = P_r(K)$.

Доказательство теоремы 4.2 состоит в проверке записанных равенств с помощью определения строго нильпотентных элементов.

Совпадающие идеалы $P_\ell(M)$ и $P_r(M)$ можно обозначить через $P(M)$, а совпадающие идеалы $P_\ell(N)$ и $P_r(N)$ можно обозначить через $P(N)$.

Теперь перейдём к кольцу K формальных матриц любого порядка n вида (3) из § 3. Для любых индексов i и j определим подбимодули

$$J_\ell(M_{ij}) = \{x \in M_{ij} \mid M_{ji}x \subseteq J(R_j)\},$$
$$J_r(M_{ij}) = \{x \in M_{ij} \mid xM_{ji} \subseteq J(R_i)\}.$$

При $i = j$ получаем $J_\ell(R_i) = J_r(R_i) = J(R_i)$.

Теорема 4.3. *Имеют место равенство*

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R_1) & J_\ell(M_{12}) & \dots & J_\ell(M_{1n}) \\ J_\ell(M_{21}) & J(R_2) & \dots & J_\ell(M_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_\ell(M_{n1}) & J_\ell(M_{n2}) & \dots & J(R_n) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

и аналогичное равенство с заменой индекса ℓ *на* r.

Доказательство. Случай $n = 2$ — это теорема 4.1. Пусть K — кольцо формальных матриц порядка $n \geqslant 3$. Представим K как кольцо блочных матриц $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ N & R_n \end{smallmatrix}\right)$, где R — кольцо формальных матриц порядка $n-1$ и M, N — соответствующие бимодули (см. доказательство предложения 3.3). Согласно теореме 4.1 имеем

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J(M) \\ J(N) & J(R_n) \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции радикал $J(R)$ имеет вид, указанный в теореме. Надо показать, что множество из правой части равенства $(*)$ совпадает с $\left(\begin{smallmatrix} J(R) & J(M) \\ J(N) & J(R_n) \end{smallmatrix}\right)$. Достаточно проверить, что

$$\begin{pmatrix} J_\ell(M_{1\,n}) \\ \dots \\ J_\ell(M_{n-1\,n}) \end{pmatrix} = J(M) \quad \text{и} \quad (J_\ell(M_{n1}), \dots, J_\ell(M_{n\,n-1})) = J(N),$$

где

$$J(M) = \{m \in M \mid Nm \subseteq J(R_n)\},$$
$$J(N) = \{n \in N \mid Mn \subseteq J(R)\}.$$

Требуемое утверждение вытекает из определения подбимодулей $J_\ell(M_{ij})$. Только уточним следующий момент. Если $x \in J_\ell(M_{nj})$, то

$$M_{in}x \subseteq J_\ell(M_{ij})$$