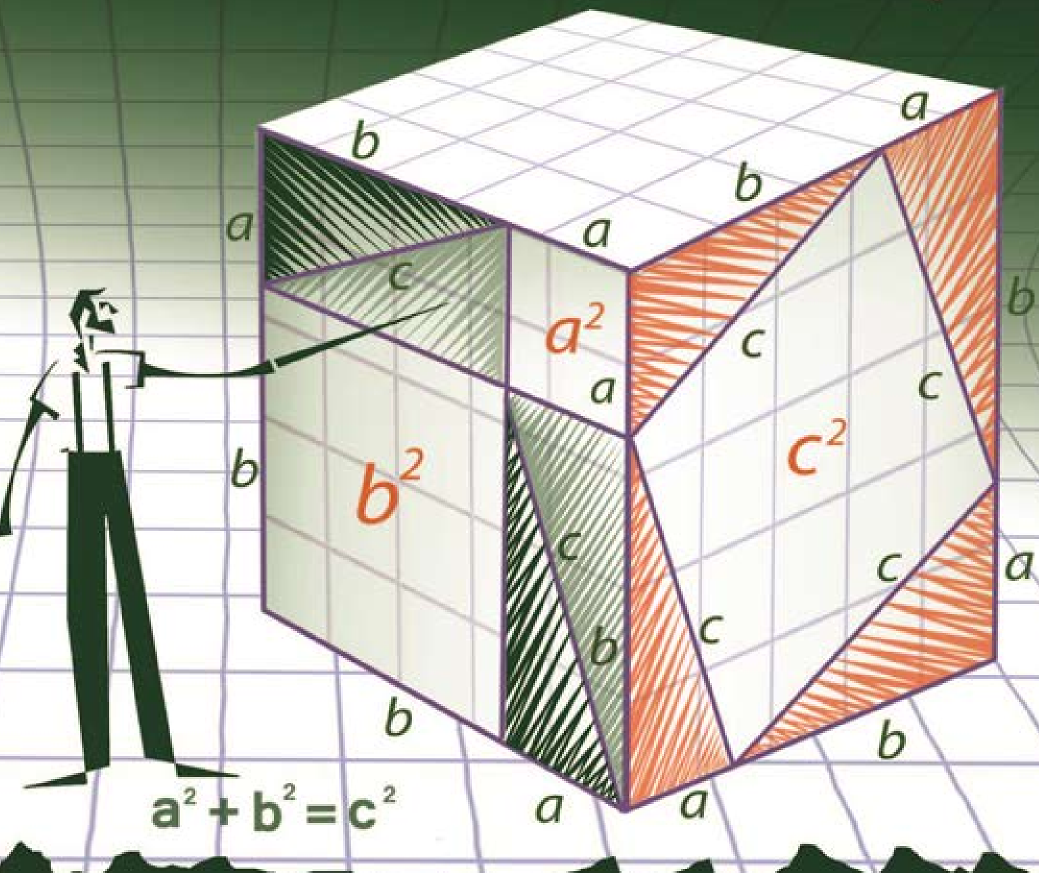
Алексей САВВАТЕЕВ

Математика для гуманитариев

Живые лекции



Университет Дмитрия Пожарского

УДК 51
ББК 22.1я7, 22.1я9
С12

Подготовлено к печати и издано по решению
Ученого совета Университета Дмитрия Пожарского

Савватеев, Алексей Владимирович.
С12 Математика для гуманитариев. Живые лекции. — М.: Русский фонд содействия образованию и науке, 2017. — 304 с.: ил.
ISBN 978-5-91244-176-9

Книга, которую вы держите в руках, необычна: это лекции в режиме реального времени. Стиль повествования позволяет воссоздать атмосферу, царившую в аудитории, ведь на бумагу практически без шлифовки перенесены не только слова лектора, но и догадки и комментарии слушателей. Именно такой концепцией обусловлен отказ от последовательного введения математических понятий. Автор переходит от сюжета к сюжету, предлагая в процессе беседы всё более логически сложные конструкции, подталкивающие к освоению базовых понятий, построений и языка современной математики. Для понимания данной книги не требуется никакое начальное знание, однако человек, освоивший ее целиком, сможет в дальнейшем читать более специальную литературу.

УДК 51
ББК 22.1я7, 22.1я9

ISBN 978-5-91244-176-9

Оглавление

Раздел I

«Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит».

М. В. Ломоносов

Лекция 1

Алексей Савватеев: Здравствуйте!

Аудитория: Здравствуйте!

А.С.: Для начала я расскажу кое-что о себе.

В 1990 году я закончил 57-ю школу г. Москвы. Может быть, кто-то из вас ее знает. Тогда это была математическая школа. Но в 1989 году по инициативе нашей учительницы литературы Зои Александровны Блюминой было принято решение набрать гуманитарный класс, чтобы уравновесить огромный перекос учащихся в мужскую сторону в нашей школе. Я был в 11-м классе, а набрали 9-й.

Зачем я об этом говорю? У меня в гуманитарном классе была подруга, которой я объяснял математику. Однажды надо было решить уравнение типа $\sin x = \frac{1}{2}$. Я *объяснял, объяснял, объяснял,* а потом перешел непосредственно к решению уравнения $\sin y = \frac{1}{2}$. Она говорит: «Стой... Там же был $\sin x$».

Я начинаю объяснять: «Это закрытый терм, замкнутая переменная, она уничтожится». Ничего не понимает, в глазах ужас. Я продолжаю: «Мы должны решить уравнение относительно y, да?»

— Нужно же было относительно x решать, ну зачем ты «y» написал?

У меня случился *затык*, не могу объяснить и всё. И тогда я понял, что из меня получается очень плохой учитель. Я привык говорить со школьниками, которые приходили на маткружок. А они не задавали таких вопросов.

Спустя годы я закончил мехмат МГУ и Российскую Экономическую Школу (РЭШ), после чего ездил по регионам России, вел курсы повышения квалификации для преподавателей экономики. В Москве считалось, что экономика — наука совершенно математизированная и точная. По крайней мере, и в РЭШ, и в Высшей Школе Экономики до сих пор всячески насаждается, что математика — это главное в экономике. В регионах мы столкнулись, однако, с преподавателями, которым было трудно перешагнуть через вещи, для математиков очевидные. Но через пять дней курса многие слушатели оказывались очень способными к математике. Просто в некотором месте у них стоял заслон. Его полезно преодолеть всем, ибо это — часть интеллектуальной культуры. Даже если вы никогда не занимались математикой, некоторые вещи знать надо... Так же как я должен знать что-то про историю или химию.

Давайте теперь поговорим о словосочетании «абсолютное доказательство». Если вы в общем и целом поймете, что это такое, то значит, мы не зря сегодня позанимались с вами.

Что такое абсолютное доказательство, я объясню на примерах. Начнем с игры в «пятнадцать».

Слушатель: Пятнашки?

Слушатель: Шестнашки?

А.С.: Чтобы мы говорили об одном и том же, я объясню правила этой игры.

В квадрате 4×4 имеется пятнадцать одинаковых квадратных фишек, пронумерованных от 1 до 15. Их нельзя вынимать, можно только передвигать на свободное место. Стандартная исходная позиция: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 и пустое место, которое используется для передвижения фишек. (См. рис. 1; может быть задана и нестандартная исходная позиция.)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 1. Стандартная исходная позиция игры в «пятнадцать».

Пустое место можно гнать по всей игровой зоне, т. е. *разрешенное действие* при игре — передвижение на пустое место одной из соседних с ним фишек.

Игру придумал где-то 130 лет назад американский математик-популяризатор Сэм Лойд. А чуть позже он пообещал большой приз

($1000) тому, кто переведет комбинацию с картинки рис. 2 в исходную позицию на рис. 1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 2. Позиция, которую получили, поменяв местами фишки 14 и 15.

Такая вот детская игра. Делайте, что хотите (в рамках указанного правила). Передвигайте фишки как вам угодно. Только приведите игру в исходную позицию. Начался настоящий пятнашечный бум. Примечательно, что на этот момент наука алгебра в другой части света находилась в очень продвинутом состоянии. Математики сказали свое веское слово, предоставив абсолютное доказательство того, что выиграть в такую игру невозможно. Тем не менее ажиотаж с игрой в пятнашки продолжался еще много лет — так много было желающих посрамить математику и «срубить» тысячу долларов.

Что же означает в этой игре «абсолютное доказательство»? Это значит: какие бы действия вы ни совершали, сколько бы времени и каким количеством способов бы ни передвигали фишки, вы *никогда, ни при каких условиях* не вернетесь из позиции на рис. 2 в исходную позицию на рис. 1. В частности, если кто-то предъявил такое решение, значит он — лгун. Он, видимо, взял, выдрал фишки из коробки и расставил их в правильном порядке. Абсолютное доказательство — это точное, настолько точное утверждение, насколько вообще что-то может быть точным. Математика — наука точных утверждений. Не «примерно», не «может быть», не «скорее всего, не приведете», а *никогда, ни при каких условиях не приведете, какие бы способности к этой игре у вас ни были.*

Я постараюсь доказать эту теорему. Но что значит «постараюсь доказать»? Что вообще означает «доказать»? Что значит «я ее докажу»? Как вы это понимаете?

Слушатель: Мы будем убеждены.

А.С.: Вот именно. Я найду способ вас убедить. Но с другой стороны, это не совсем то, что нам нужно.

Расскажу такую историю. Один рыцарь объяснял другому рыцарю математику. Первый рыцарь был очень умный, а второй — очень глупый. Второй рыцарь никак не мог понять доказательство. И тогда умный рыцарь говорит: «Честное благородное слово, это так». И второй сразу поверил: «Ну, тогда о чем разговор. Мы же с Вами люди безупречной чести, и я, конечно, Вам верю. Я полностью убежден».

У нас разговор пойдет не о таком способе убеждения. Идея математического, абсолютного доказательства не в том, что я дам честное слово, а в том, что я, апеллируя к вашему *разумению*, передам вам какое-то знание, которое вы потом столь же спокойно передадите дальше. Вы придёте и скажете: «Мы знаем, почему в “пятнашки” бессмысленно играть. Мы это знаем совершенно точно, нам это доказал Алексей. И не просто доказал при помощи какого-то там шаманства, пошаманил-пошаманил и сказал, что нет решения у этой задачи. Мы получили такое знание, которое сможем воспроизвести и доказать, что выиграть в игру “пятнашки” невозможно».

Насчет пошаманить есть очень поучительный эпизод из жизни математиков. В начале XX века жил в Индии математик Срини́васа Рамануджан. На момент начала нашей истории ему было 26 лет. Он заваливал письмами лондонское математическое общество, в которых были формулы, содержащие числа «π» и «e» (мы с ними позже познакомимся) и страшные бесконечные суммы, которым эти выражения равны. В Лондоне проверяют — всё верно. А Рамануджан присылает всё новые и новые письма. Профессор математики Г. Харди приглашает его приехать в Англию и рассказать, как он выводит эти формулы. Рамануджан отвечает, что формулы сообщает ему во сне богиня Маха-Лакшми*. Харди, конечно, посмеялся, решив, что индус не хочет делиться секретом.

*По другим сведениям, это была богиня Намаккам.

Английский математик пишет новое письмо, в котором пытается заверить Рамануджана, что никто не будет претендовать на его открытие. Такое предположение оскорбляет индуса. Он отвечает, что совершенно не дорожит такими вещами, как авторство.

В конце концов Рамануджан все-таки приехал в Лондон, где стал профессором университета. Многие присланные им формулы оказались верны. Но далеко не все из предложенных им формул на сегодняшний день доказаны. Некоторые из них остаются откровениями, которые были сообщены богиней Рамануджану. «Абсолютное» их доказательство пока неизвестно.

А теперь отдохнем, посмотрим на этот футбольный мяч (рис. 3).

Рис. 3. Неужто и здесь прячется абсолютное доказательство?

Из чего состоит мяч? Он сшит из лоскутков. Вы когда-нибудь задумывались над тем, как именно сделан футбольный мяч и почему именно так? Это — чисто математический вопрос. Вы пока подумайте, где же тут математика. А я приступаю к математическому доказательству невозможности выиграть в игру «15».

Начнем с гораздо более простой ситуации. Возьмем доску 8×8 (рис. 4) и достаточно большой запас (заведомо больший, чем нам может понадобиться) костей домино (одна доминошка покрывает две клеточки на доске).

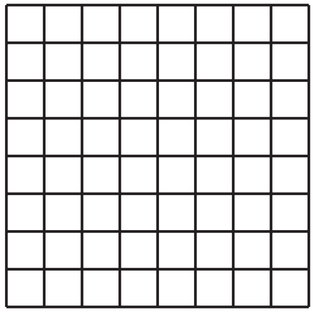


Рис. 4. Доска 8×8.

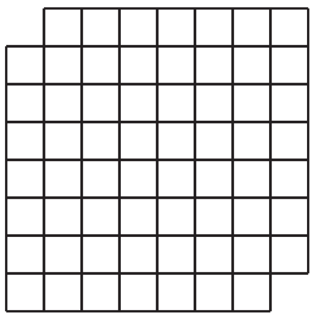


Рис. 5. «Урезанная» доска 8×8.

Теперь я аккуратненько отрезаю у квадрата 8×8 два противоположных угла (рис. 5). Получилась фигура, которая состоит из 62 квадратиков. Число, делящееся на 2. Поэтому почему бы не попробовать замостить ее доминошками. Но если вы начнете пытаться сделать это один, два, три, четыре раза, у вас ничего не будет получаться. 30 доминошек влезет, а 31-я — нет. Физик, когда увидит эту ситуацию, поэкспериментирует 1000 раз и скажет: «Экспериментально установлен закон — нарисованная фигура не замощается доминошками 1×2». Физик* также может наблюдать за игрой в футбол много-много раз и сказать: «Экспериментально установлено, что мяч падает вниз, а также, знаете,

*Это обидная для физиков аналогия.

все остальные тела, похоже, тоже падают вниз». Все знают, что все тела падают вниз. Это экспериментальный факт. Но доказать этот факт, в принципе, невозможно. Никто на свете не гарантирует, что завтра этот закон не прекратит действовать. Придумают какую-нибудь гравицапу, и всё полетит не вниз, а вверх. Это — физический закон, он не может быть доказан. Он может быть только проверен очень много раз. Еще хуже с социальными и экономическими законами, например, с законом «спрос рождает предложение». У экономистов много таких заклинаний. И они очень часто не работают. Наступает кризис, наступает новая фаза развития социума — и всё. Перестают быть верными старые законы. Социальная реальность постоянно ломает стереотипы, которые связаны с ее поведением, развитием, эволюцией. Физическая реальность так не делает, но тем не менее доказательств в ней тоже нет.

В нашем случае с доской мы, в принципе, можем попробовать перебрать все варианты и сделать вывод — не получилось. Но сколько времени нам нужно будет потратить? Давайте примерно оценим. Сколькими способами можно положить первую доминошку?

Слушатель: Тремя.

А.С. (показывая на доске 8×8 различные положения кости домино): Раз, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять...

Слушатель: Двумя.

Слушатель: Тридцатью.

А.С.: Ну, тридцатью — хорошо. А почему двумя?

Слушатель: Вертикально и горизонтально.

А.С.: Это два способа ее расположения. А сколько положений на самой доске она может занять?

Слушатель: Кучу.

А.С.: Очень-очень много. 30 — это довольно хороший ответ. На самом деле около 50. Давайте исходить из 50. На самом деле не важно, что 30, что 50, даже 10. Потому что после того как мы положили первую такую фишечку, сколько способов остается для второй?

Слушатель: $(n-1)$.

А.С.: Грубо говоря, 49. Еще, на самом деле, надо учесть порядок, в котором мы положили доминошки. Нужно поделить на два. То есть 50 умножим на 49 и поделим на два.

Дальше кладем третью, четвертую и так далее. И каждый раз домножаем и домножаем — количество вариантов очень быстро растет. (Показывает на доске всё новые варианты.)

Есть миф, будто математика состоит из формул. В 1993 году, когда я учился на 3-м курсе мехмата, я ехал на Урал к тете. Со мной в купе ехала мама с маленькой 4-летней дочкой. И дочка говорит: «Мама, а можно почитать дядину книгу?» Книга моя называлась «Алгебра». Мама сказала: «Ты в ней ничего не поймешь, там одни формулы». Я передаю книгу и говорю: «Найдите первую формулу. На какой она странице?» Формул в книге по алгебре не очень много, и самое страшное не в их количестве, а в том, что они ужасающие, в них одни буквы, даже цифр почти нет. Это, скорее, похоже на какой-то древний язык. Совершенно не то в книге, что должно быть с точки зрения людей. Идея, что математика состоит из формул, столь же чудовищна, как мысль, что в храм люди заходят, чтобы просто совершить обряд, поставить свечку. Моя дочь говорит, например: «Пойдем, поставим огоньки». Для нее это нормально, она маленькая. Математика — это вселенная, в которой есть язык формул. Но суть не в нём, а в том, какие глубинные законы есть в математике. И вот эти законы, эту внутреннюю красоту я постараюсь вскрыть.

После такого философского отступления вернемся к нашей доске.

Произведение, которое получится уже через 20 умножений, имеет порядок количества атомов во вселенной (как любят говорить в научно-популярных книгах). Вот с чем сравнимо количество способов, которые нужно перебрать, чтобы заявить: «Мы перебрали все варианты, задачу решить нельзя». Надо придумать что-то другое. И то, что мы сейчас придумаем — это *абсолютное доказательство.*

Может быть, у кого-то есть идеи?

Слушатель: Взять площадь каждой фишки и разделить на нее общую площадь поля.

А.С.: Ничего не выйдет. Общая площадь 62, у каждой фишки — 2, значит нужна 31 доминошка, это мы понимаем. Но 30 умещается, а 31 — нет (рис. 6).

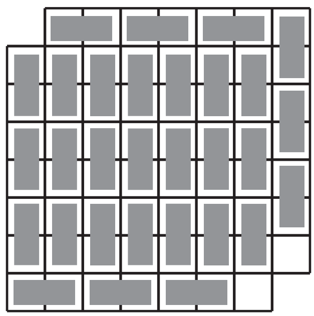


Рис. 6. Внимание! На доске уже не квадратики, а «кирпичи»!

Последняя доминошка распадается на два квадратика в разных местах. И что бы вы ни делали, последняя будет, как заколдованная, распадаться на два квадратика.

Теперь я доказываю, что замостить доску доминошками невозможно.

Ведь перед нами, по сути, шахматная доска. Давайте вернем ей ее шахматный вид. Клетки на ней будут то черные, то белые (рис. 7).

После вырезания двух угловых квадратиков, сколько черных и сколько белых клеточек останется?

Слушатель: Одних будет больше, других — меньше.

Слушатель: Одна доминошка должна покрывать и белую, и черную, да?

А.С.: Кто-то уже всё понимает (см. рис. 8). Любая доминошка, уложенная на эту доску, покрывает и белую, и черную клет-

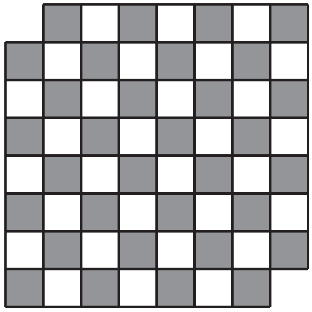


Рис. 7. Теперь все «кирпичи» сделаем двуцветными.

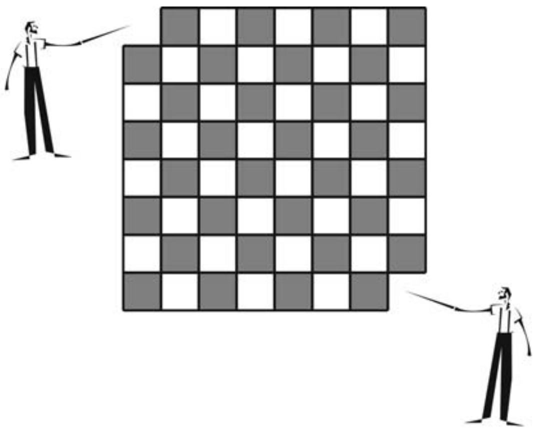


Рис. 8. Сеанс черной магии заканчивается полным разоблачением!

ку. Поэтому, если бы фигуру, которую я сейчас нарисовал, можно было бы заложить доминошками, черных и белых клеток было бы одинаковое количество. Но мы вырезали две белых. Осталось 30 белых и 32 черные клетки. Противоречие. Количества черных и белых клеток не равны друг другу. Значит, нашу фигуру нельзя замостить доминошками. Абсолютное доказательство закончено. Не надо ничего перебирать.

Повторю еще раз.

Я взял урезанную с двух сторон шахматную доску. Исходная шахматная доска имела 32 черные и 32 белые клетки. А в урезанной шахматной доске пропали две белые угловые клетки. Поэтому стало 30 белых и 32 черных. Теперь предположим на секундочку, что мы решили задачу, и все клетки заполнены доминошками. Следует заметить, что каждая доминошка обязана лежать одной своей половиной на черной, а другой своей половиной на белой клеточке, как ты ее ни клади. Следовательно, если бы мы смогли замостить эту фигуру доминошками в количестве 31 штуки, то была бы 31 черная и 31 белая клетка. У нас же 32 черные и 30 белых клеток. А значит, замостить обрезанную доску нельзя. В этом и состоит *препятствие*, как говорят математики, препятствие к решению задачи. Заметьте, что мы проводили *доказательство от противного*. Это очень важный прием. Я предположил, что мы задачу решили, и привел ситуацию к явному противоречию.

Переходим к более сложному сюжету — «разоблачению игры в пятнадцать».

Сейчас вы узнаете тайну, которую почти никто не знает: почему в пятнашки нельзя «выиграть», то есть перевести игру из позиции на рис. 2 в исходную позицию на рис. 1. Посмотрим на измененную позицию:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13.

Рис. 9. На доске выписываем «извивающуюся змею».

Глядя на рис. 9, выпишу числа от 1 до 15 в линеечку, но не подряд, а хитрым способом. Зачем я это сделаю, будет ясно потом. Вот они:

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13.

Такой порядок движения древние греки называли «бустрофедон», что в переводе значит «так, как пашет бык» (рис. 10).

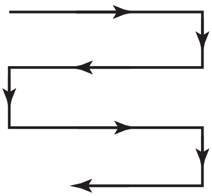


Рис. 10

С помощью такого движения я закодировал информацию об игровом поле в виде одной строки. Обратно раскодировать так же просто, как и закодировать (*с точностью до нахождения пустого места*).

Если, например, сдвинуть 14 в угол, то при кодировании я получу такую же строчку (см. рис. 11). Вообще, легко понять, что правила игры «15» позволяют быстро и уверенно перегнать пустое место на игровом поле на любую клетку из шестнадцати, двигаясь бустрофедоном.

Примечание. Кодированием называется процедура изображения элементов одного множества с помощью элементов другого (обычно более простого) множества, желательно таким образом, чтобы не потерялась никакая существенная часть информации о первом множестве.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15		14

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13.

Рис. 11. Пустое место может перемещаться вдоль «змеи».

При этом если пустое место находилось где-то в другом месте, в середине, например, то всегда можно передвинуть фишки так, чтобы оно оказалось в конце.

Теперь мы, начиная с положения рис. 9, должны каким-то образом менять это положение, гонять пустое место, чтобы прийти к последовательности, соответствующей рис. 1:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 15,\ 14,\ 13.$$

Каждый раз, когда я переставляю пустое место, наша строка меняется. Я хочу показать, что как бы она ни менялась, кое-что сохраняется. В математике это называется словом *инвариант*.

Инвариант — что-то, что не меняется.

Понятие инварианта — одно из ключевых математических понятий.

Итак, есть *что-то*, что связано с нашей последовательностью, что при выполнении разрешенных действий не будет меняться. Что это, угадать так просто нельзя, иначе миллионы людей в Америке и в Европе не занимались бы ерундой.

В процессе перестановок строка будет сильно меняться, вплоть до очень серьезного перемешивания. Но что-то меняться не будет никогда. Давайте напряжемся и поймем, что это такое.

Рассмотрим все пары чисел (чисел всего 15). Сколько всего можно составить пар?

Слушатель: 7.

А.С.: Нет. Всех различных пар. Пусть у нас есть 15 кружочков разного цвета. Сколько существует способов вынуть два кружка?

Пока будем считать, что порядок, в котором мы вынимаем кружочки, нам важен. Сколькими способами я могу взять первый кружок?

Слушатель: Пятнадцатью.

А.С.: Пятнадцатью. Правильно.

Слушатель: 15 факториал?

А.С.: Нет. 15 факториал — это множество всех возможных строк.

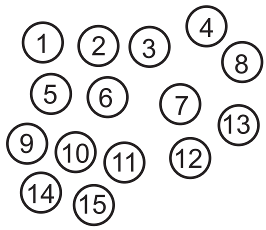


Рис. 12. Нарисуем 15 разных кружочков с номерами.

Но ведь гуманитарии не обязаны знать слово «факториал», о котором мы с вами говорим. Термин «факториал» нам понадобится в других темах, поэтому я его определю.

Есть некоторое число n. Простите, я употреблю буковку. Умножим n на $n-1$, потом на $n-2$ и так далее, и, наконец, умножим на 2 и на 1. То, что получилось, обозначается $n!$ (это и есть факториал числа n):

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Например, «15 факториал»:

$$15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Слушатель: Мы сейчас что-то прояснили?

А.С.: Нет. Было произнесено слово «факториал». И теперь я его объясняю.

Факториал — это произведение подряд идущих, убывающих до единицы натуральных чисел. В нашей задаче он не понадобится (понадобится в другой лекции).

Первый кружок вы можете выбрать 15 разными способами. Сколько остается способов для выбора второго кружка?

Слушатели: 14.

А.С.: 14. Итого? Есть такое знаменитое правило произведения. Число способов выбрать пару — это произведение количества способов выбрать первый ее элемент на количество способов выбрать второй. Почему? Мы выбрали первый. Посмотрим, сколько пар мы с ним можем получить. Второй выбирается 14 способами, значит пар 14. А теперь мы выбрали другой первый, с ним тоже можно составить 14 пар. И так далее. Получается $14 + 14 + 14\ldots$ и так 15 раз.

Отсюда и берется правило произведения: $15 \cdot 14$ способов.

Но есть одна хитрость. Я хочу посчитать пары независимо от порядка кружочков. Чтобы вот такие пары (см. рис. 13) не различались. Что надо сделать с количеством способов?

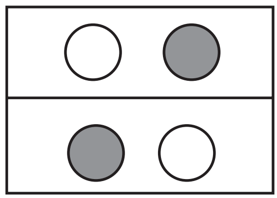


Рис. 13. Эти пары для нас не разные, а одинаковые.

Слушатель: Разделить на два.

А.С.: Да. Мы любую такую пару посчитали два раза. Один раз, когда мы сначала взяли синий круг, а потом белый. В другой раз мы первым взяли белый круг, а вторым — синий. То есть мы каждую пару посчитали два раза. Поэтому ответ $(15 \cdot 14) : 2 = 105$.

Мы посчитали число имеющихся пар из 15 элементов — «Цэ из 15 по 2», как говорят математики. «Цэ» означает первую букву слова combination (комбинация). См. формулу (1).

$$C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105. \qquad (1)$$

Математики любят символы. Но зачем они? Затем, что иначе придется очень много писать. Символы и язык математики нужны, чтобы сокращать запись. Почему древние греки и римляне не дошли до современных высот математики? Потому, что они тратили очень много времени на лингвистическую работу перевода математики в слова (и обратно: слов в математику). А вот когда математика перешла на символы, начался прорыв, о котором я еще расскажу.