ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ
Единый государственный экзамен

Л.И. СЛОНИМСКИЙ, И.С. СЛОНИМСКАЯ

МАТЕМАТИКА

САМЫЕ СЛОЖНЫЕ ЗАДАНИЯ

для подготовки к единому государственному экзамену

более 900 тренировочных заданий

ЕГЭ – ШКОЛЬНИКАМ И УЧИТЕЛЯМ

100 БАЛЛОВ

УДК 373:51
ББК 22.1я721
С48

Слонимский, Лев Иосифович.

С48 Математика : самые сложные задания единого государственного экзамена / Л. И. Слонимский, И. С. Слонимская. — Москва: Издательство АСТ, 2022. — 396, [4] с.: ил. — (Подготовка к единому государственному экзамену).

ISBN 978-5-17-136453-3

Данный сборник — учебное пособие для быстрой и эффективной подготовки к единому государственному экзамену по математике профильного и базового уровней.

Пособие включает более 1000 примеров и заданий, чаще всего вызывающих трудности у учащихся.

К примерам, сгруппированным по темам официального кодификатора, даны подробные разборы и задачи для самостоятельного решения.

В конце сборника размещены ответы.

Предлагаемый материал позволит учителям организовать работу по подготовке к итоговой аттестации в 11-м классе, а учащимся — проверить свои знания и готовность к экзамену по математике в формате ЕГЭ любого уровня сложности.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-136453-3

Содержание

Предисловие

Сборник содержит учебный материал, необходимый для овладения навыками правильного и быстрого решения самых сложных заданий единого государственного экзамена по математике базового и профильного уровней.

Понятие «сложные задания» неоднозначно: кто-то испытывает трудности в выполнении текстовых задач, а кто-то не уверен в своём знании стереометрии. В этой книге авторы объясняют сложное простым языком, чтобы облегчить понимание математических законов и легко справиться с любыми экзаменационными заданиями.

Данное учебное пособие не только позволит проверить и закрепить знания и умения, полученные выпускниками средней школы при изучении математики, но и создать возможности для индивидуализации и дифференциации самого процесса подготовки к ЕГЭ, благодаря имеющейся системе заданий, различающихся по форме и уровню сложности.

Задания в сборнике сгруппированы тематически в соответствии с кодификатором элементов содержания ЕГЭ. Рядом с каждым примером указан уровень сложности: П — профильный, Б — базовый.

Для каждого типа заданий в пособии даётся его разбор, вариант решения, блок тренировочных задач для самостоятельной работы и ответы к ним.

В связи с возможными изменениями в формате и количестве заданий рекомендуем в процессе подготовки к экзамену обращаться к материалам сайта официального разработчика экзаменационных заданий — Федерального института педагогических измерений: www.fipi.ru

Желаем успешной сдачи ЕГЭ по математике!

Авторы

1. АЛГЕБРА

1.1. Преобразование числовых выражений и выражений с переменными

Пример 1 (П)

Вычислите значение выражения $\dfrac{14}{\cos\left(\frac{47\pi}{4}\right)\,\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)}$.

Решение.

$\cos\left(\frac{47\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{48\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(16\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{39\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{40\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(10\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Подставим получившиеся значение в данное выражение

$$\frac{14}{\cos\left(\frac{47\pi}{4}\right)\,\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)} = \frac{14}{\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}} = 14 : \frac{1}{2} = 14 \cdot 2 = 28.$$

Ответ: 28.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите значение выражения $\dfrac{48}{\cos\left(\frac{35\pi}{6}\right)\,\sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right)}$.

2. Вычислите значение выражения $\dfrac{11}{\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)\,\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right)}$.

3. Вычислите значение выражения $\dfrac{59}{\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right)\,\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right)}$.

4. Вычислите значение выражения $\dfrac{44}{\cos\left(\frac{35\pi}{3}\right)\,\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)}$.

5. Вычислите значение выражения $\dfrac{36}{\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)\,\sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right)}$.

Пример 2 (П)

Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ и $\alpha \in (0{,}5\pi;\ \pi)$.

Решение.

<u>I способ</u>.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1^{\backslash 13} - \dfrac{9}{13} = \dfrac{4}{13};$

$\cos\alpha < 0$, т. к. $\alpha \in (0{,}5\pi;\ \pi)$; $\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{4}{13}} = -\dfrac{2}{\sqrt{13}};$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} : \left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5.$

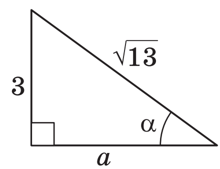
<u>II способ</u>.

Секреты ЕГЭ

$\mathrm{tg}\,\alpha < 0,\ \alpha \in (0{,}5\pi;\ \pi);$

$a = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = \sqrt{13 - 9} = \sqrt{4} = 2;$

$\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{3}{2} = -\ 1{,}5.$



Ответ: $-1{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения

6. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$ и $\alpha \in (0;\ 0{,}5\pi)$.

7. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{7}{\sqrt{65}}$ и $\alpha \in (1{,}5\pi;\ 2\pi)$.

8. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi;\ 1{,}5\pi)$.

9. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{61}}$ и $\alpha \in (0{,}5\pi;\ \pi)$.

10. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$ и $\alpha \in (0{,}5\pi;\ \pi)$.

Пример 3 (П)

Найдите значение выражения $\frac{18\sin 158^\circ}{\cos 79^\circ \cos 11^\circ}$.

Решение.

$$\frac{18\sin 158^\circ}{\cos 79^\circ \cos 11^\circ} = \frac{18\sin 2\cdot 79^\circ}{\cos 79^\circ \cos 11^\circ} = \frac{36\sin 79^\circ \cos 79^\circ}{\cos 79^\circ \cos 11^\circ} = \frac{36\sin 79^\circ}{\cos 11^\circ} =$$

$$= \frac{36\sin (90^\circ - 11^\circ)}{\cos 11^\circ} = \frac{36\cos 11^\circ}{\cos 11^\circ} = 36.$$

Ответ: 36.

Задачи для самостоятельного решения

11. Найдите значение выражения $\frac{5\sin 12^\circ}{\cos 6^\circ \cos 84^\circ}$.

12. Найдите значение выражения $\frac{20\sin 106^\circ}{\cos 53^\circ \cos 37^\circ}$.

13. Найдите значение выражения $\frac{-3\sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cos 53^\circ}$.

14. Найдите значение выражения $\frac{7\sin 8^\circ}{\cos 4^\circ \cos 86^\circ}$.

15. Найдите значение выражения $\frac{-19\sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cos 13^\circ}$.

Пример 4 (П)

Найдите значение выражения $\sqrt{48} - \sqrt{192}\sin^2\frac{13\pi}{12}$.

Решение. Заметим, что $192 = 4\cdot 48$ и $1 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.

$$\sqrt{48} - \sqrt{192}\sin^2\frac{13\pi}{12} = \sqrt{48}\left(1 - 2\sin^2\frac{13\pi}{12}\right) = \sqrt{48}\cos\left(2\cdot\frac{13\pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt{48}\cos\frac{13\pi}{6} = \sqrt{48}\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{48}\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{48}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

Задачи для самостоятельного решения

16. Найдите значение выражения $\sqrt{8} - \sqrt{32}\sin^2\frac{\pi}{8}$.

17. Найдите значение выражения $\sqrt{72} - \sqrt{288}\sin^2\frac{21\pi}{8}$.

18. Найдите значение выражения $\sqrt{18}-\sqrt{72}\sin^2\frac{7\pi}{8}$.

19. Найдите значение выражения $\sqrt{27}-\sqrt{108}\sin^2\frac{23\pi}{12}$.

20. Найдите значение выражения $\sqrt{50}-\sqrt{200}\sin^2\frac{11\pi}{8}$.

Пример 5 (Б)

Найдите tg x, если $\cos x=-\frac{5}{\sqrt{34}}$ и $90°<x<180°$.

Дано: $\cos x=-\frac{5}{\sqrt{34}}$ и $90°<x<180°$.

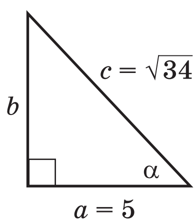
Найти: tg x.

Решение.

Определим знак tg x. Так как $90°<x<180°$, то tg $x<0$.

Найдём значение tg x с помощью прямоугольного треугольника.

$\cos\alpha=\frac{a}{c}=\frac{5}{\sqrt{34}}$.



$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-5^2}=\sqrt{34-25}=$
$=\sqrt{9}=3.$

$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}=\frac{3}{5}=0{,}6$; $\mathrm{tg}\,x=-0{,}6$.

Ответ: – 0,6.

Задачи для самостоятельного решения

21. Вычислите значение выражения $-7\sqrt{3}\sin 1500°$.

22. Вычислите значение выражения $3\sqrt{2}\cos 1125°$.

23. Вычислите значение выражения -68 tg $585°$.

24. Вычислите значение выражения $-4\sin 570°$.

25. Вычислите значение выражения $14\cos 2220°$.

Пример 6 (П)

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 5}{\log_7 9} + \log_9 0{,}2$.

Решение.

Воспользуемся формулой перехода к новому основанию

$\dfrac{\log_7 5}{\log_7 9} + \log_9 0{,}2 = \log_9 5 + \log_9 0{,}2 = \log_9 5 \cdot 0{,}2 = \log_9 1 = 0$.

Ответ: 0.

Задачи для самостоятельного решения

26. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{2020} 5}{\log_{2020} 8} + \log_8 0{,}2$.

27. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 2}{\log_9 4} + \log_4 0{,}5$.

28. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 4}{\log_5 9} + \log_9 0{,}25$.

29. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{11} 8}{\log_{11} 12} + \log_{12} 0{,}125$.

30. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 20}{\log_7 13} + \log_{13} 0{,}05$

Пример 7 (П)

Найдите значение выражения $\log_a (ab^3)$, если $\log_b a = \dfrac{3}{14}$.

Решение.

Поскольку логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел по тому же основанию, получим:

$\log_a (ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + \log_a b^3$.

А далее применяем формулы:

$\log_a b^k = k\log_a b$ и $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, находим

$1 + \log_a b^3 = 1 + 3 \log_a b = 1 + \dfrac{3}{\log_b a} = 1 + 3 : \dfrac{3}{14} = 1 + \dfrac{3 \cdot 14}{3} =$

$= 1 + 14 = 15$.

Ответ: 15.

Задачи для самостоятельного решения

31. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{5}$.

32. Найдите значение выражения $\log_a(a^3b^{10})$, если $\log_b a = \frac{5}{13}$.

33. Найдите значение выражения $\log_a(ab^6)$, если $\log_b a = \frac{3}{17}$.

34. Найдите значение выражения $\log_a(a^7b^9)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$.

35. Найдите значение выражения $\log_a(a^6b^8)$, если $\log_b a = \frac{2}{5}$.

Пример 8 (П)

Найдите значение выражения $(1 - \log_6 24)(1 - \log_4 24)$.

Решение.

$(1 - \log_6 24)(1 - \log_4 24) = (1 - \log_6 6 \cdot 4)(1 - \log_4 4 \cdot 6) =$
$= (1 - (\log_6 6 + \log_6 4))(1 - (\log_4 4 + \log_6 6)) =$
$=(1 - 1 - \log_6 4)(1 - 1 - \log_4 6) = -\log_6 4 \cdot (-\log_4 6) = 1$

Ответ: 1.

Задачи для самостоятельного решения

36. Найдите значение выражения $(1 - \log_5 15)(1 - \log_3 15)$.

37. Найдите значение выражения $(1 - \log_7 56)(1 - \log_8 56)$.

38. Найдите значение выражения $(1 - \log_9 36)(1 - \log_4 36)$.

39. Найдите значение выражения $(1 - \log_7 105)(1 - \log_{15} 105)$.

40. Найдите значение выражения $(1 - \log_5 45)(1 - \log_9 45)$.

Пример 9 (П)

Найдите $p(x) + p(22 - x)$, если $p(x) = \frac{x(22 - x)}{x - 11}$, при $x \neq 11$.

Решение.

Так как значение выражения не зависит от значения переменной x, то подставим $x = 0$.

$p(x) + p(22 - x) = p(0) + p(22) = \frac{0(22 - 0)}{0 - 11} + \frac{22(22 - 22)}{22 - 11} = 0 + 0 = 0.$

Ответ: 0.

Задачи для самостоятельного решения

41. Найдите $p(x) + p(6 - x)$, если $p(x) = \dfrac{x(6 - x)}{x - 13}$, при $x \neq 3$.

42. Найдите $p(x) + p(-22 - x)$, если $p(x) = \dfrac{x(-22 - x)}{x + 11}$, при $x \neq -11$.

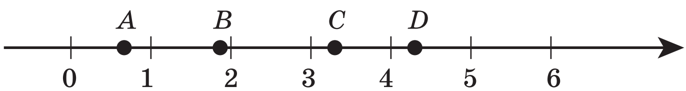
43. Найдите $p(x) + p(10 - x)$, если $p(x) = \dfrac{x(10 - x)}{x - 5}$, при $x \neq 5$.

44. Найдите $p(x) + p(24 - x)$, если $p(x) = \dfrac{x(24 - x)}{x - 12}$, при $x \neq 12$.

45. Найдите $p(x) + p(-14 - x)$, если $p(x) = \dfrac{x(-14 - x)}{x + 7}$, при $x \neq -7$.

Пример 10 (Б)

На прямой отмечены точки A, B, C, D.



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\log_3 2$
B	2) $\dfrac{30}{7}$
C	3) $\sqrt{3{,}5}$
D	4) $\left(\dfrac{3}{10}\right)^{-1}$

Решение.

$\log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3;$

$0 < \log_3 2 < 1$ — соответствует точке A.

$\dfrac{30}{7} = 4\dfrac{2}{7}$; $4 < \dfrac{30}{7} < 5$ — соответствует точке D.

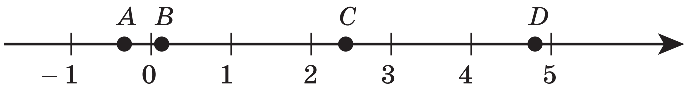
$\sqrt{1} < \sqrt{3{,}5} < \sqrt{4}$; $1 < \sqrt{3{,}5} < 2$ — соответствует B.

$\left(\dfrac{3}{10}\right)^{-1} = \dfrac{10}{3} = 3\dfrac{1}{3}$; $3 < 3\dfrac{1}{3} < 4$ — соответствует C.

Ответ: 1342.

Задачи для самостоятельного решения

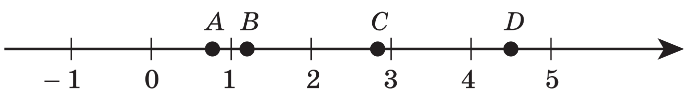
46. На прямой отмечены точки A, B, C, D.



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\log_7 0{,}5$
B	2) $\dfrac{18}{7}$
C	3) $\sqrt{23{,}3}$
D	4) $\left(\dfrac{23}{3}\right)^{-1}$

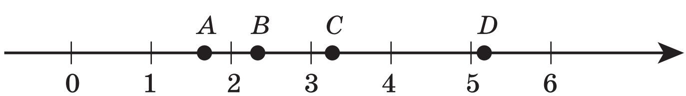
47. На прямой отмечены точки A, B, C, D.



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\log_5 7$
B	2) $\dfrac{17}{6}$
C	3) $\sqrt{0{,}6}$
D	4) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}$

48. На прямой отмечены точки A, B, C, D.



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

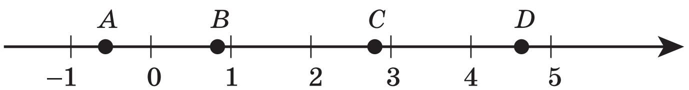
1) $\log_2 10$

2) $\frac{7}{3}$

3) $\sqrt{27}$

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

49. На прямой отмечены точки A, B, C, D.



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

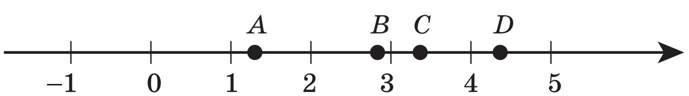
1) $\log_4 0{,}6$

2) $\frac{50}{11}$

3) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

4) $\sqrt{0{,}7}$

50. На прямой отмечены точки A, B, C, D.



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

1) $\log_2 19$

2) $\frac{4}{3}$

3) $\sqrt{11{,}5}$

4) $\left(\frac{7}{20}\right)^{-1}$

1.2. Уравнения

1.2.1. Рациональные уравнения

Секреты ЕГЭ

Часто, решая уравнения с большими числами, мы получаем дискриминант квадратного уравнения, равный пятизначному числу. В некоторых случаях можно упростить решение, воспользовавшись заменой переменной.

Пример 11 (П)

Решите уравнение $\frac{50}{25-y}=\frac{50-3y}{y}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

Решение.

$\frac{50}{25-y}=\frac{50-3y}{y}$. Сократим дроби в левой и правой части уравнения на 25, $m=\frac{y}{25}$, т. е. $y=25m$. $\frac{2}{1-m}=\frac{2-3m}{m} \,\Big|\cdot m(1-m)\neq 0$, $m\neq 0$, $m\neq 1$; $2m=2-5m+3m^2$; $3m^2-7m+2=0$;

$m_1=\frac{1}{3}$, $m_2=2$; $y_1=25m_1=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$; $y_2=25m_2=25\cdot 2=50$.

Ответ: 50.

Задачи для самостоятельного решения

51. Решите уравнение $\frac{65-x}{13}=\frac{78}{x}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

52. Решите уравнение $\frac{80-x}{16}=\frac{96}{x}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

53. Решите уравнение $\frac{75-x}{9}=\frac{84}{x}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

54. Решите уравнение $\frac{35-x}{7}=\frac{42}{x}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

Пример 12 (П)

Решите уравнение: $\frac{180}{x+12} + \frac{1}{6} = \frac{180}{x}$. В ответ запишите больший корень.

Решение.

$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+12} = \frac{1}{6}$. Мы можем сократить две дроби с числителем 180 на 12, соответственно сделаем замену переменной $\frac{x}{12} = m$.

$\frac{15}{m} - \frac{15}{m+1} = \frac{1}{6}$; $15 \cdot (\frac{1^{\because m+1}}{m} - \frac{1^{\because m}}{m+1}) = \frac{1}{6}$; $\frac{15}{m(m+1)} = \frac{1}{6}$; $m(m+1) = 90$;

$m^2 + m - 90 = 0$; $m_1 = 9$, $m_2 = -10$;

$x_1 = 12 \cdot 9$, $x_2 = 12 \cdot (-10)$; $x_1 = 108$, $x_2 = -120$.

Ответ: 108.

Задачи для самостоятельного решения

55. Решите уравнение $\frac{14}{x+20} + \frac{1}{60} = \frac{14}{x}$. В ответ запишите больший корень.

56. Решите уравнение $\frac{92}{x+12} + \frac{3}{20} = \frac{92}{x}$. В ответ запишите больший корень.

57. Решите уравнение $\frac{30}{x+20} + \frac{1}{20} = \frac{30}{x}$. В ответ запишите больший корень.

58. Решите уравнение $\frac{126}{x+18} + \frac{1}{6} = \frac{126}{x}$. В ответ запишите больший корень.

Пример 13 (П)

Решите уравнение: $\frac{255}{x-1} - \frac{255}{x+1} = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

Решение.

$\frac{255}{x-1} - \frac{255}{x+1} = 2$; $255 \cdot (\frac{1^{\because x+1}}{x-1} - \frac{1^{\because x-1}}{x+1}) = 2$; $\frac{255 \cdot (x+1-x+1)}{(x-1)(x+1)} = 2$;

$\frac{255 \cdot 2}{(x-1)(x+2)} = 2 \,|: 2$;

$\frac{255}{x^2-1} = 1$; $x^2 - 1 = 255$; $x^2 = 256$; $x = \pm 16$.

Ответ: – 16.

Задачи для самостоятельного решения

59. Решите уравнение $\frac{143}{x+1} + 2 = \frac{143}{x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

60. Решите уравнение $\frac{195}{x+1} + 2 = \frac{195}{x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

61. Решите уравнение $\frac{165}{x+2} + 4 = \frac{165}{x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

62. Решите уравнение $\frac{221}{x+2} + 4 = \frac{221}{x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

63. Решите уравнение $\frac{99}{x+1} + 2 = \frac{99}{x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

Пример 14 (П)

Решите уравнение: $\frac{200}{15+x} + \frac{200}{15-x} = 30$.

Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите меньший из корней.

Решение.

$\frac{200}{15+x} + \frac{200}{15-x} = 30 \,|\, : 10$; $\frac{20}{15+x} + \frac{20}{15-x} = 3$. Сократим дробь с числителем 20 на 5 и выполним замену переменной $\frac{x}{5} = m$.

$\frac{4}{3-m} + \frac{4}{3+m} = 3$; $4 \cdot (\frac{1^{\ddots 3+m}}{3-m} + \frac{1^{\ddots 3-m}}{3+m}) = 3$; $4\,\frac{3+m+3-m}{(3-m)(3+m)} = 3$;

$\frac{4 \cdot 6}{9-x^2} = 3$; $27 - 3m^2 = 24 \,|\, : 3$; $9 - m^2 = 8$; $m^2 = 1$; $m = \pm 1$; $x = \pm 5$.

Ответ: –5.

Задачи для самостоятельного решения

64. Решите уравнение $\frac{240}{16+x}+\frac{240}{16-x}=32$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

65. Решите уравнение $\frac{468}{22+x}+\frac{468}{22-x}=44$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

66. Решите уравнение $\frac{216}{15+x}+\frac{216}{15-x}=30$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

67. Решите уравнение $\frac{315}{18+x}+\frac{315}{18-x}=36$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

68. Решите уравнение $\frac{375}{20+x}+\frac{375}{20-x}=40$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите меньший из корней.

Секреты ЕГЭ

Рассмотрим уравнения, которые называются возвратными. В этих уравнениях числовые коэффициенты, стоящие на противоположных симметричных местах, должны быть равны по модулю. Например, $ax^4+bx^3\pm cx^2\pm bx+a=0$, $a\neq 0$. В этом случае, используется специальный приём для решения такого уравнения. Сначала надо разделить левую и правую часть возвратного уравнения на $x^2\neq 0$.

Получаем уравнение вида $ax^2+bx\pm c\pm\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$.

Перегруппируем слагаемые

$ax^2+\frac{a}{x^2}+bx\pm\frac{b}{x}\pm c=0$; $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x\pm\frac{1}{x}\right)\pm c=0$.

Далее, выполняем замену переменной $x\pm\frac{1}{x}=t$.

Возведём $x\pm\frac{1}{x}$ в квадрат.

$$\left(x\pm\frac{1}{x}\right)^2=x^2\pm 2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}\pm 2$$

Отсюда, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x \pm \frac{1}{x}\right)^2 \pm 2$, т.е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \pm 2$.

Получаем квадратное уравнение
$a(t^2 \pm 2) + bt \pm c = 0$; $at^2 \pm 2a + bt \pm c = 0$;
$at^2 + bt \pm 2a \pm c = 0$.
Затем, решаем квадратное уравнение и возвращаемся к исходной переменной.

Пример 15 (П)

а) Решите уравнение $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$.
б) Найдите корни этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{0,3}]$.

Решение.

а) $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$; $x \neq 0$, т.к. если $x = 0$, то $2 = 0$, а это неверно.
$2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0 \mid : x^2 \neq 0$;

$$2x^2 + 3x - 4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0;$$

$$2x^2 + \frac{2}{x^2} + 3x - \frac{3}{x} - 4 = 0;$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

Замена переменной $x - \frac{1}{x} = t$, тогда

$$t^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2};$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = t^2 + 2;$$

$2(t^2 + 2) + 3t - 4 = 0$;
$2t^2 + 4 + 3t - 4 = 0$;
$2t^2 + 3t = 0$;
$t(2t + 3) = 0$;
$t = 0$ или $2t + 3 = 0$;
$t = -\frac{3}{2}$.

$x - \frac{1}{x} = 0| \cdot x \neq 0$ или $x^{\ddots 2x} - \frac{1^{\ddots 2}}{x} = -\frac{3}{2}\ | \cdot 2x \neq 0;$

$x^2 - 1 = 0$ $\quad$ $2x^2 - 2 = -3x;$

$x = \pm 1$ $\quad$ $2x^2 + 3x - 2 = 0;$

$x_1 = -\frac{4}{2}, x_2 = \frac{1}{2};$

$x_1 = -2.$

б) Найдите корни этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[-\sqrt{3};\ \sqrt{0,3}]$.

Из корней $-2; -1; \frac{1}{2}; 1$ нам нужно отобрать те, которые принадлежат заданному промежутку.

$-2 = -\sqrt{4};\ -\sqrt{4} \notin [-\sqrt{3};\ \sqrt{0,3}];$

$-1 = -\sqrt{1};\ -\sqrt{3} \leqslant -\sqrt{1} \leqslant \sqrt{0,3};$

$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{0,25};\ -\sqrt{3} \leqslant \sqrt{0,25} \leqslant \sqrt{0,3};$

$1 = \sqrt{1};\ \sqrt{0,3} < \sqrt{1}.$

Ответ: а) $-2; -1; \frac{1}{2}; 1$; б) $-1; \frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

69. а) Решите уравнение $2x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 45x + 18 = 0$.
б) Найдите корни этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[\sqrt{2};\ \sqrt{5}]$.

70. а) Решите уравнение $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$.
б) Найдите корни этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$.

Секреты ЕГЭ

Рассмотрим два метода решения, позволяющие упростить квадратное уравнение с большими коэффициентами, неудобными для вычислений.

- **I метод.**

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.
Если коэффициент b делится на число m, а коэффициент a делится на m^2, то уравнение можно записать так $km^2x^2 + lmx + c = 0$, где $km^2 = a$, $lm = b$.
Далее делаем замену переменной $mx = t$, $m^2x^2 = t^2$, $kt^2 + lt + c = 0$ и решаем полученное уравнение. Для записи ответа находим $x_{1,2} = \frac{t_{1,2}}{m}$.

Пример 16 (П)

Решите уравнение $27x^2 - 39x + 14 = 0$.
Решение.
$27x^2 - 39x + 14 = 0$; $39 = 3 \cdot 13$, a $27 = 3^2 \cdot 3$.
Замена переменной
$3x = t$; $(3x)^2 = 9x^2 = t^2$, $x = \frac{t}{3}$.
$3t^2 - 13t + 14 = 0$;
$t_1 = \frac{6}{3}$, $t_2 = \frac{7}{3}$;
$t_1 = 2$;
$x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{7}{3 \cdot 3}$;
$x_2 = \frac{7}{9}$.
Ответ: $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{9}$.

Задания для самостоятельной работы

71. Решите уравнение $98x^2 + 49x - 30 = 0$.

72. Решите уравнение $12x^2 - 16x + 5 = 0$.

73. Решите уравнение $125x^2 + 45x + 4 = 0$.