ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

ЕГЭ

единый государственный экзамен ЕГЭ

Н. А. КИМ

МАТЕМАТИКА

ПОЛНЫЙ ЭКСПРЕСС-РЕПЕТИТОР для подготовки к единому государственному экзамену

ПРОФИЛЬНЫЙ и БАЗОВЫЙ уровни

ЕГЭ – ШКОЛЬНИКАМ И УЧИТЕЛЯМ

100 БАЛЛОВ

УДК 373:51
ББК 22.1я721
К40

Ким, Наталья Анатольевна.

К40 Математика : полный экспресс-репетитор для подготовки к единому государственному экзамену / Н.А. Ким. — Москва: Издательство АСТ, 2021. — 319, [1] с.: ил.

ISBN 978-5-17-136289-8

Пособие рассчитано на самостоятельную или под руководством учителя подготовку школьников к ЕГЭ.

В него в полном объёме включён материал курса по математике, который проверяется на экзаменах базового и профильного уровней.

Теоретическая часть пособия представлена в краткой и доступной форме в виде экспресс-курса. Большое количество схем и таблиц позволяет легко и быстро сориентироваться в теме и найти нужную информацию.

В практическую часть включены разборы экзаменационных заданий и задачи для самостоятельной отработки с ответами в конце пособия. Тренировочные задания соответствуют современному формату ЕГЭ.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-136289-8

Содержание

Тема 1

ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вспомним такие понятия, как натуральные числа, дроби, рациональные и действительные числа, корень, степень, логарифм. Научимся вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

СОВЕТ

Постарайся запомнить как можно больше формул.

В основном теоретический материал данного раздела рассчитан на базовый уровень освоения математики, но есть часть теории, которая необходима для решения задач на профильном уровне.

Внимательно разбери примеры, не пропускай их. Они помогут лучше усвоить правила и алгоритмы вычислений, отработать навыки быстрого выполнения заданий разных типов.

1.1. Арифметические действия. Корень. Степень. Логарифм

Изучив материал данного раздела вы научитесь выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корней натуральной степени большей 1, степени с рациональным показателем, логарифма.

БУ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Арифметические действия с натуральными числами

<table>
<tr><th rowspan="2">Закон</th><th colspan="2">Действия</th></tr>
<tr><th>Сложение
$a + b = p$
a, b — слагаемые,
p — сумма</th><th>Умножение
$a \cdot b = p$
a, b — множители,
p — произведение</th></tr>
<tr><td>Переместительный</td><td>$a + b = b + a$</td><td>$a \cdot b = b \cdot a$</td></tr>
<tr><td>Сочетательный</td><td>$(a + b) + c =$
$= a + (b + c)$</td><td>$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$</td></tr>
<tr><td>Распределительный</td><td colspan="2">$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$</td></tr>
</table>

Признаки делимости натуральных чисел

Обозначение: a делится на $b \Leftrightarrow a \,\vdots\, b$

Чётные числа: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Число делится <u>на 2</u> ($2 = 2^1$), если его последняя цифра чётная	$11135\underline{4} \,\vdots\, 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4$ — чётное число
Число делится <u>на 4</u> ($4 = 2^2$), если число составленное из последних двух цифр, делится на 4	$173\underline{32} \,\vdots\, 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 32 : 4 = 8$
Число делится <u>на 8</u> ($8 = 2^3$), если число составленное из последних трёх цифр, делится на 8	$97\underline{216} \,\vdots\, 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow 216 : 8 = 27$
Число делится <u>на 5</u> ($5 = 5^1$), если его последняя цифра 0 или 5	$371\underline{5} \,\vdots\, 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5$ — последняя цифра

Число делится на 25 ($25 = 5^2$), если число, составленное из двух последних цифр, делится на 25 или две последние цифры 0	$173\underline{75} \vdots 25 \Rightarrow$ $\Rightarrow 75 : 25 = 3$
Число делится на 10, если его последняя цифра 0	$53\underline{0} \vdots 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0$ — последняя цифра
Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3	$381 \vdots 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 + 8 + 1 =$ $= 12; 12 : 3 = 4$
Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9	$927 \vdots 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow 9 + 2 + 7 =$ $= 18; 18 : 9 = 2$
Число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах (считая справа налево), и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11	$\underline{8}5\underline{3}6 \vdots 11 \Rightarrow$ $\Rightarrow (3 + 8) -$ $- (5 + 6) = 0;$ $0 : 11 = 0$

СОВЕТ

Для решения задач базового уровня на вычисление значения числового или буквенного выражения, нахождение чисел, удовлетворяющих определенным условиям, используют признаки делимости чисел.

ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

БУ **Задание №1.** Найдите четырёхзначное число, кратное 88, все цифры которого различны и чётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение.

Число делится на 88, если оно делится на 8 и на 11.

Признак делимости на 8: число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 8.

Признак делимости на 11: число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах, либо разность этих сумм делится на 11.

Используя признак делимости на 8 и учитывая, что все цифры искомого числа должны быть чётны и различны, получаем, что последними цифрами числа могут быть: 024, 048, 064, 208, 240, 264, 280, 408, 480, 608, 624, 640, 648, 680, 824, 840, 864.

Используя признак делимости на 11 получим, что условию задачи удовлетворяют числа: 6248, 8624, 2640.

Ответ: 2640 или 6248, или 8624.

БУ **Задание №2.** Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 4, на 5 и на 6 даёт в остатке 2 и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение.

При делении на 4 число даёт в остатке 2, следовательно, оно чётное. Поскольку число при делении на 5 даёт в остатке 2, то оно может оканчиваться на 2 или на 7. Таким образом, число обязательно должно заканчиваться цифрой 2. Подбором находим, что условию задачи удовлетворяют числа 662 и 722.

Ответ: 662 или 722.

БУ **Задание №3.** Приведите пример четырёхзначного натурального числа, кратного 4, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите ровно одно такое число.

Решение. Пусть наше число имеет вид $\overline{a\,b\,c\,d}$. Тогда имеем: $\overline{a + b + c + d} = \overline{a \cdot b \cdot c \cdot d}$. И так как число делится на 4, $\overline{10c + d}$ делится на 4. Можно заметить, что если среди цифр есть хотя бы три единицы, то равенство невозможно, так как сумма будет больше произведения. Если единица только одна, то произведение будет слишком большое. Таким образом, среди цифр есть ровно две единицы. Рассмотрим двузначные числа, которые делятся на 4, две их последние цифры образуют число, делящееся на 4. Нельзя брать числа с нулём, так как в этом случае произведение будет равно нулю.

<u>12</u>: тогда одна из оставшихся цифр 1, а другая 4.

<u>16</u>: тогда одна из оставшихся цифр 1, а никакая другая не подойдёт.

<u>24</u>: значит, оставшиеся цифры — единицы.

Остальные числа будут давать слишком большое произведение или нечётную сумму.

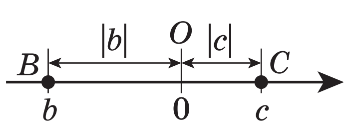
Таким образом, искомые числа: 1412, 4112, 1124.

Ответ: 1124 или 1412, или 4112.

БУ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Модуль числа

Модулем числа называют расстояние от начала отсчёта до точки, изображающей это число на координатной прямой.



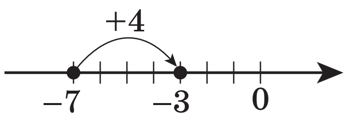
$$|a| = \begin{cases} a, \text{ при } a > 0; \\ 0, \text{ при } a = 0; \\ -a, \text{ при } a < 0; \end{cases} = \begin{cases} a, \text{ при } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

Примеры:
1) $|-3| = -(-3) = 3$;
2) $|5| = 5$;
3) $|0| = 0$;
4) $|4{,}6| = 4{,}6$;
5) $\left|-5\frac{3}{7}\right| = -\left(-5\frac{3}{7}\right) = 5\frac{3}{7}$.

Формулы для профильного уровня
$\lvert x\rvert \geqslant 0$
$\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$
$\lvert x\rvert \geqslant x$
$\lvert x\rvert^2 = x^2$
$\lvert x-y\rvert \geqslant \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$
$\lvert x\cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$
$\lvert x:y\rvert = \lvert x\rvert : \lvert y\rvert$
$\lvert x+y\rvert \leqslant \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$

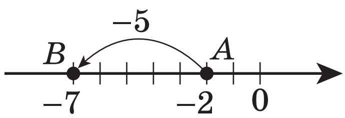
Арифметические действия с действительными числами

Сложение рациональных чисел
Если к числу a прибавить положительное число b, то точка с координатой a переместится по координатной прямой на b единичных отрезков вправо.



$$-7 + 4 = -3$$

Если к числу a прибавить отрицательное число b, то точка с координатой a переместится по координатной прямой на $-b$ единичных отрезков влево.



$$-2 + (-5) = -7$$

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо: 1) найти модули слагаемых; 2) из большего модуля вычесть меньший модуль; 3) перед полученным числом поставить знак слагаемого с бо́льшим модулем.	*Примеры*: 1) $-3 + 5 = 2$ 2) $-7 + 4 = -3$ 3) $6 + (-2) = 4$ 4) $3{,}5 + (-6) = -2{,}5$

Чтобы сложить два отрицательных числа, надо: 1) найти модули слагаемых; 2) сложить модули; 3) перед полученным числом поставить знак минус.	*Примеры*: 1) $-2 + (-5) = -7$ 2) $-3{,}5 + (-1) =$ $= -4{,}5$ 3) $-5 + (-3{,}5) =$ $= -8{,}5$
Вычитание рациональных чисел	
Чтобы найти разность двух чисел, можно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$	*Примеры*: 1) $7 - (-2) = 7 + 2 =$ $= 9$ 2) $5 - 8 = 5 + (-8) =$ $= -3$

Таблица знаков при умножении и делении рациональных чисел	
$(+) \cdot (+) = (+)$	$3 \cdot 7 = 21$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$-3 \cdot (-7) = 21$
$(-) \cdot (+) = (-)$	$-3 \cdot 7 = -21$
$(+) \cdot (-) = (-)$	$3 \cdot (-7) = -21$
$(+) : (+) = (+)$	$35 : 5 = 7$
$(-) : (-) = (+)$	$-35 : (-5) = 7$
$(-) : (+) = (-)$	$-35 :7 = -5$
$(+) : (-) = (-)$	$35 : (-7) = -5$

Дроби

Основное свойство дроби	
Числитель и знаменатель дроби можно или умножить или разделить на одно и то же число, и при этом дробь не изменится.	
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$	$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \ldots$
$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$	$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24} = \frac{18 : 3}{24 : 3} = \frac{6}{8}$
Сравнение дробей	
$\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$, т. к. $5 > 2$	

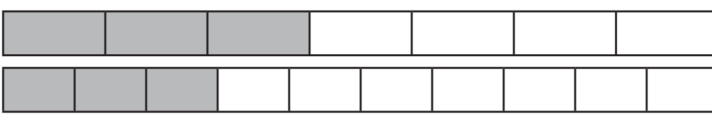
СОВЕТ

При сравнении обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями достаточно сравнить их числители.

$$\frac{3}{7} < \frac{3}{10}, \text{ т. к. } 10 > 7$$

СОВЕТ

При сравнении обыкновенных дробей с одинаковыми числителями достаточно сравнить их знаменатели.



<table>
<tr><th colspan="2">Арифметические действия с дробями</th></tr>
<tr><td colspan="2">Чтобы сложить (вычесть) две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.</td></tr>
<tr><td>$\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$
$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+pn}{nq}$</td><td>$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}$
$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq-pn}{nq}$</td></tr>
</table>

Произведением двух дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей данных дробей.	
$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{1} = \frac{an}{b}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число обратное делителю.	
$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{bn}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Десятичная дробь		
Десятичная дробь: $\frac{a}{10^m}$, где $m \in \mathbf{N}$; $a \in \mathbf{R}$		
$\frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{457}{100} = 4{,}57$	$\frac{9}{1000} = 0{,}009$

Корень натуральной степени $n > 1$
$\sqrt[n]{a} = b$, $b^n = a$, $n \in \mathbf{N}$ $(n > 1)$
Корень n-ой степени — это число, чья n-я степень равна подкоренному числу.
Если $n = 2k$ — чётное число, то $\sqrt[2k]{a} = b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $k \in \mathbf{N}$
Если $n = 2k + 1$ — нечётное число, то $\sqrt[2k+1]{a} = b$, $\{a, b\} \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$

Свойства корня натуральной степени $n > 1$
Если $a \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, то $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$ и $\sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert$
Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Если $a \geqslant 0$, $\{n, k\} \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
Если $a \geqslant 0$, $\{n, k\} \in \mathbf{N}$, $n > 1$, то $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
Если $a \geqslant 0$, $\{n, k\} \in \mathbf{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

ПУ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Формулы действий с корнями для чётной степени

$$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{\lvert a \rvert} \cdot \sqrt[2k]{\lvert b \rvert},\ a \cdot b \geqslant 0,\ k \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{\lvert a \rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}},\ a \cdot b \geqslant 0,\ b \neq 0,\ k \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[2k]{a^n} = \left(\sqrt[2k]{\lvert a \rvert}\right)^n,\ a^n \geqslant 0,\ k \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{Z}$$

$$\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2kn]{a^n},\ a \geqslant 0,\ k, n \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[2km]{a^{2kn}} = \sqrt[m]{\lvert a^n \rvert},\ k, n, m \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert,\ k \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$$

Формулы действий с корнями для нечётной степени

$$\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b},\ k \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[2k+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k+1]{a}}{\sqrt[2k+1]{b}},\ b \neq 0,\ k \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[2k+1]{a^n} = \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^n,\ k \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{Z}$$

$$\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[(2k+1)n]{a^n},\ k,\ n \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[(2k+1)m]{a^{(2k+1)n}} = \sqrt[m]{a^n},\ k,\ n,\ m \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,\ k \in \mathbf{N}$$

Примеры на разные комбинации свойств корней натуральной степени $n > 1$
$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{\lvert a\rvert}$
$\sqrt[6]{x^6y^6} = \sqrt[6]{(xy)^6} = \lvert xy\rvert$
$\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a},\ a \geqslant 0$
$\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = \lvert a^3\rvert$
$\sqrt[3]{2\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{28}} = \sqrt[6]{28}$
$\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{8\sqrt{2}}} = \sqrt[6]{\sqrt{64}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\sqrt{128}} = \sqrt[12]{128}$

Степень с рациональным показателем
Степенью положительного числа a с рациональным показателем r, представленным в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, то есть $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. ($0^{\frac{m}{n}} = 0$, $\{m, n\} \in \mathbf{N}$).

<table>
<tr><td colspan="2">Для любого $a > 0$ и любого рационального числа p выполняется равенство $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства рациональной степени числа</td></tr>
<tr><td>$(|a|)^r = |a^r|$</td><td>для $a \in \mathbf{R}$, r, $s \in \mathbf{Q}$, причём
$0 < r < s \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^r > a^s,\ 0 < a < 1; \\ a^r < a^s,\ a > 1. \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для a, $b \in \mathbf{R}$, причём $a > 0$, $b > 0$, $r \in \mathbf{Q}$, $a < b \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} a^r < b^r,\ r > 0; \\ a^r > b^r,\ r < 0. \end{array}\right.$</td></tr>
</table>

Примеры заданий на преобразование степеней и формулы, необходимые для решения этих заданий

Задания	Формула
$64^{\frac{1}{4}} = (4^4)^{\frac{1}{4}} = 4$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$
$(3 \cdot \sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 45$	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$
$(7^{\frac{1}{3}})^3 = 7^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 7$	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{nm}$
$(\sqrt{5})^2 = 5$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$
$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$	$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $k \in \mathbf{N}$
$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(\pm 2)^4} = \lvert\pm 2\rvert = 2$	$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a\rvert$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$
$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{(\pm 3)^4} = \lvert\pm 3\rvert = 3$	$\lvert a\rvert = \left[\begin{array}{l} a,\ a \geqslant 0; \\ -a,\ a < 0. \end{array}\right.$

Задания	Формула
$\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{25\cdot 5}=$ $=\sqrt[3]{5}=5$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
$2^{0,25}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a>0$, $n\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{Z}$
$\sqrt[4]{32}:\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{32:4}=$ $=\sqrt[4]{2^4}=2$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b\neq 0$
$3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=$ $=3^{\frac{3+1+2}{6}}=3$	$a^m\cdot a^n=a^{n+m}$
$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=4^2=16$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $n\in\mathbf{Z}$
$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}=16^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{16})^3=$ $=4^3=64$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$, $ab>0$, $n\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}$

Логарифм

Понятие логарифма
Логарифмом положительного числа ***b*** по основанию ***a*** называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b: $$\log_a b=k\Leftrightarrow a^k=b,$$ где a — основание логарифма: $a>0$, $a\neq 1$, b — логарифмическое число: $b>0$.

Десятичный логарифм: $\lg b=\log_{10} b$
Натуральный логарифм: $\ln b=\log_e b$, где $e=2{,}71828...$

Примеры:

1) $\log_2 8 = 3$, т. е. $2^3 = 8$;

2) $\log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$, т. е. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$;

3) $\lg 1000 = 3$, т. е. $10^3 = 1000$;

4) $\ln e = 1$, т. е. $e^1 = e$.

Правило о знаке логарифма

$\log_a b$ положителен, если основание a логарифма и число b расположены на числовой оси по одну сторону от 1, и $\log_a b$ отрицателен, если основание a логарифма и число b расположены на числовой оси по разные стороны от 1.

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

Сравнение логарифма с нулём

$$\log_a b > 0 \Leftrightarrow (a > 1 \text{ и } 0 < b < 1) \text{ или } (a < 1 \text{ и } 0 < b < 1)$$

$$\log_a b < 0 \Leftrightarrow (a > 1 \text{ и } 0 < b < 1) \text{ или } (a < 1 \text{ и } b > 1)$$

Логарифмические формулы

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1,\ a > 0,\ a \neq 1$; $\lg 10 = \ln e = 1$	$\log_a a^k = k,\ k \in \mathbf{R}$
$\log_a (bc) = \log_a \lvert b \rvert + \log_a \lvert c \rvert$, $a > 0,\ a \neq 1,\ bc > 0$	$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$