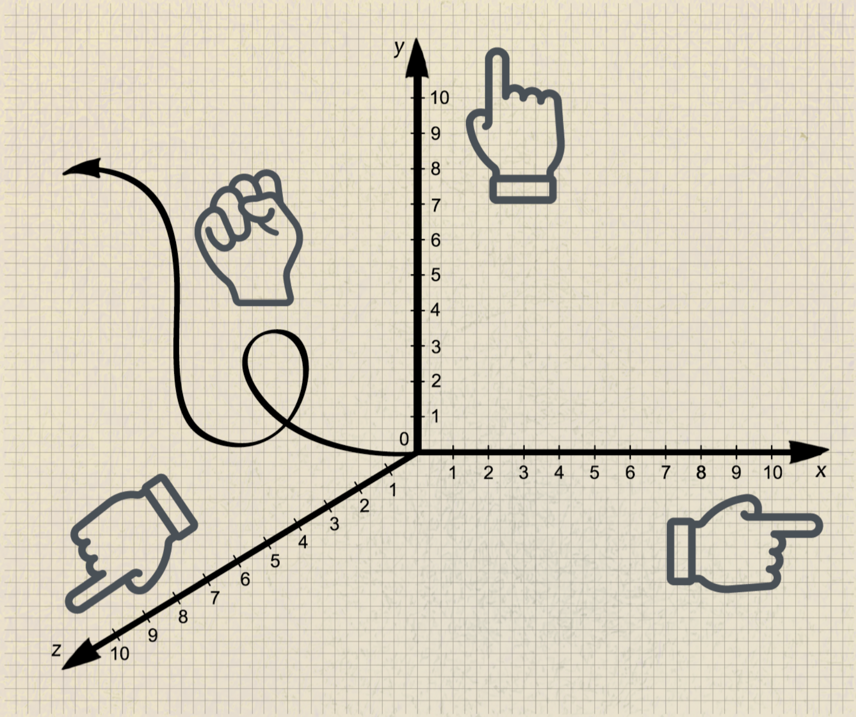
ПРИКЛЮЧЕНИЯ МАТЕМАТИКА В МИРЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ



ЧЕМ ЗАНЯТЬСЯ В ЧЕТВЕРТОМ ИЗМЕРЕНИИ?

МЭТТ ПАРКЕР

УДК 51
ББК 22.1
П18

Серия «Просто о необычном и сложном»

Matt Parker
THINGS TO MAKE AND DO IN THE FOURTH DIMENSION
A Mathematician's Journey Through Narcissistic Numbers, Optimal Dating Algorithms, at Least Two Kinds of Infinity, and More

Перевод с английского *Павла Миронова*

Компьютерный дизайн *Виктории Лебедевой*

Паркер, Мэтт.

П18 Чем заняться в четвертом измерении? Приключения математика в мире бесконечности / Мэтт Паркер ; [перевод с английского П. Миронова]. — Москва : Издательство АСТ, 2020. — 512 с. : ил. — (Просто о необычном и сложном).

ISBN 978-5-17-098981-2

Австралиец Мэтт Паркер (род. 1980) начинал как учитель математики, а потом переехал в Англию и стал рассказывать о своем любимом предмете на канале BBC и в газете *Guardian*, а потом придумал формат публичных лекций, на которых рассказывает о сложных проблемах математики очень понятно и с большой дозой юмора. Выступления Мэтта неизменно пользуются огромным успехом, и он широко известен в мире шоу-бизнеса как «Стенд-ап-математик». Книга, которую вы держите в руках, выдержана в том же стиле: автор умеет говорить просто о сложном, при этом нигде не погрешив против научной точности. И даже читатель, бесконечно далекий от цифр, форм и формул, вряд ли устоит перед неотразимым обаянием математики.

УДК 51
ББК 22.1

Оглавление

0. Глава нулевая 7
1. Как у вас с цифрами? 14
2. Создание фигур 36
3. Квадратное — это здорово. 57
4. Перемещение фигур 76
5. Фигуры: теперь в трех измерениях 100
6. Занимательная упаковка 125
7. Прайм-тайм: время простых. 148
8. Узел — это не проблема 175
9. Графы — это не шутки! 196
10. Четвертое измерение 224
11. Метод алгоритма. 250
12. Как построить компьютер 280
13. Числа вперемешку 306
14. Удивительные фигуры. 339
15. Измерения более высокого порядка. 360
16. Хорошие данные не сдаются 384
17. Возмутительные числа 410
18. К бесконечности и дальше 443

N+1. Глава следующая 467

Ответы в конце книги 472

Благодарность за предоставленные тексты
и изображения 503

0
Глава нулевая

Оглянитесь по сторонам, и вы наверняка увидите какой-нибудь сосуд, типа пивного стакана или кофейной чашки. Как бы они ни выглядели, длина окружности их дна почти всегда будет больше высоты. Иногда стакан может показаться слишком высоким, однако у стандартного британского стакана для пинты пива длина окружности примерно в 1,8 раза больше высоты. А у стандартного «высокого» стакана, который подают в вездесущих кофейнях *Starbucks*, этот параметр составляет 2,3, хотя компания и не прислушалась к моему совету переименовать этот стакан в «приземистый».

Воспользоваться этим знанием в своих интересах довольно просто. В следующий раз, когда вам доведется быть в пабе, кафе или любом другом заведении, где вы хотели бы получить что-нибудь бесплатно, поспорьте с каким-нибудь другим посетителем о том, что окружность его кружки или чашки больше, чем высота. Если же речь пойдет о кружке с ручкой в пабе или необычно большой чашке в кафе, то считайте, что вам повезло еще сильнее: длина окружности у таких емкостей обычно в три раза превышает высоту — иными словами, вы можете с изрядным пафосом поставить три такие кружки одну на другую и заявить, что длина окружности их основания все равно больше высоты. Но если вы тут же достанете какой-нибудь измерительный прибор типа линейки, это заставит ваших жертв усомниться в спонтанности вашего пари, поэтому лучше воспользоваться для измерений соломинкой или салфеткой.

Это работает для всех стаканов, за исключением самых тонких стаканов для шампанского. Если вы хотите проверить свой стакан, не вызывая лишних подозрений, попробуйте обхватить его рукой. Ваши указательный и большой пальцы вряд ли коснутся друг друга на противоположной стороне. А теперь попробуйте теми же пальцами измерить высоту стакана. Скорее всего, вам это удастся (или, в худшем случае, вы будете близки к успеху). Это — чрезвычайно наглядная демонстрация того, насколько мала высота стакана по сравнению с длиной окружности его дна.

Я бы хотел, чтобы люди больше знали именно о такой математике — удивляющей, неожиданной и, что важнее всего, позволяющей получать бесплатную выпивку. Цель этой книги состоит в том, чтобы показать людям массу милых и интересных мелочей, связанных с математикой.

Крайне печально, что большинство людей считает, будто математика ограничивается тем, что они изучали в средней школе. На самом деле этот мир гораздо обширнее.

При неправильном преподавании математика действительно может быть невероятно скучной. Зайдите в любую школу на урок математики, и вы почти гарантированно увидите, что большинство учеников, мягко говоря, не воодушевлены происходящим. И проблема состоит в том, что эта чудовищная скука преследует одно поколение школьников за другим.

Но есть и исключения. Некоторые из учащихся полюбят математику и даже решат посвятить ей всю свою жизнь. Что же такое они разглядели, чего не смогли увидеть все остальные?

Я был одним из таких немногочисленных учеников — за множеством скучных задач я смог увидеть суть математики и логику, лежащую в ее основе.

При этом я отлично понимал, что́ чувствуют мои товарищи, особенно те из них, кто был талантлив в области спорта. Я боялся упражнений с футбольным мячом так же сильно, как они боялись занятий по математике.

Но я, по крайней мере, мог видеть цель всех этих попыток дриблинга футбольным мячом через препятствия в виде дорожных конусов — они позволяли выстроить базовый набор навыков, крайне полезных для реальной игры в футбол. И я понимал, почему мои спортивные товарищи так ненавидели математику: мне кажется, что совершенно непродуктивно заставлять учеников изучать базовые навыки, необходимые для понимания математики, — а потом не давать им возможности глубже погрузиться в эту область и порезвиться на этом поле.

Все это прекрасно представляли себе дети, любившие математику. Именно по этой причине люди, занимающиеся математикой, способны сделать неплохую карьеру. Если человек работает в области математических исследований, то он не просто занимается сложными операциями по сложению и вычитанию, как может показаться многим. Точно так же профессиональный футболист не ограничивается занятиями по совершенствованию своего дриблинга на поле. Профессиональный математик использует имеющиеся у него навыки и методы для изучения области математики и новых математических открытий. Он ищет необычные фигуры в более высоких измерениях, пытается найти новые типы чисел или изучает мир за пределами бесконечности. Так что дело далеко не ограничивается одной лишь арифметикой.

В этом и состоит секрет математики — по сути, это одна большая игра.

Профессиональные математики занимаются игрой. И цель моей книги заключается в том, чтобы открыть для читателей новый мир и дать им все необходимое для этой игры. Вы и сами вполне можете почувствовать себя математиком, играющим в премьер-лиге. А если вы из тех ребят, которые любят математику с детства, то у вас имеется множество новых областей для открытий. Все начинается с того, что вы можете и что вы делаете. Вы можете создавать четырехмерные объекты, разбираться с парадоксальными фигурами и завязывать невероятные узлы. Эта книга — великолепный технологический инструмент с идеальной функцией паузы. Если вы хотите остановиться и немного поиграть с математическими задачами, то не отказывайте себе в этом. Книга со всеми своими статичными, материальными страницами будет терпеливо ждать вашего возвращения.

Все самые интересные и необычные элементы передовых технологий являются по своей сути математическими — начиная с обработки информационных массивов в современной медицине и заканчивая уравнениями, помогающими передавать текстовые сообщения с одного мобильного телефона на другой. Однако даже технология, опирающаяся на сложные математические техники, изначально возникла лишь потому, что какому-то математику показалось интересным разобраться с какой-то головоломкой.

В этом и состоит суть математики. Она пытается найти закономерность и логику просто так; можно сказать, что она удовлетворяет наше игровое любопытство. Новые математические открытия могут иметь бесчисленное количество практических применений — от них порой даже зависит наша жизнь, — однако причина появления этих открытий крайне редко бывает столь же практичной.

Говорят, что физик Ричард Фейнман, лауреат Нобелевской премии, сказал о предмете своих занятий так: «Физика — как секс: она может приводить к практическим результатам, но это не основная причина, по которой мы ей занимаемся».

Я также надеюсь, что вам в процессе чтения этой книги не составит особого труда вспомнить школьные уроки математики. Без этого вы просто не сможете понять все самое интересное. Каждый из нас хотя бы приблизительно помнит, что такое математическая константа «пи» (примерно равная 3,14), а кое-кто может вспомнить, что она описывает отношение диаметра круга к длине его окружности. Именно благодаря числу «пи» мы знаем, что окружность стакана более чем в три раза превышает путь через его середину. Оценивая размер стакана, большинство людей обращает внимание именно на диаметр, забывая умножить эту величину на «пи». Подобные примеры позволяют нам не просто запомнить величину этого соотношения, а протестировать его в условиях реального мира. Как это ни печально, но в школьном курсе математики нас редко учат тому, каким образом с помощью этой науки можно выиграть бесплатную выпивку в баре.

Причина, по которой мы не можем полностью отказаться от школьной математики, состоит в том, что самые интересные вещи в этом мире базируются на значительно менее интересных. Отчасти именно поэтому некоторые люди находят математику столь сложной — они упускают из вида некоторые жизненно важные для понимания шаги и поэтому просто не могут в полной мере понять красоту более высоких идей. Однако все было бы совсем иначе, если бы они усваивали информацию постепенно и в правильном порядке.

В математике практически нет вопросов, не поддающихся довольно простому пониманию, однако порой крайне важно, чтобы вы действовали в оптимальном порядке. Разумеется, для того чтобы добраться до верха высокой лестницы, вам потребуется прилагать большие усилия с первого момента до последнего, однако усилия для преодоления каждой отдельно взятой ступеньки одинаковы. То же самое происходит с математикой. Вы двигаетесь шаг за шагом. Если вы понимаете, что такое простые числа, то вам будет значительно проще изучать простые узлы.

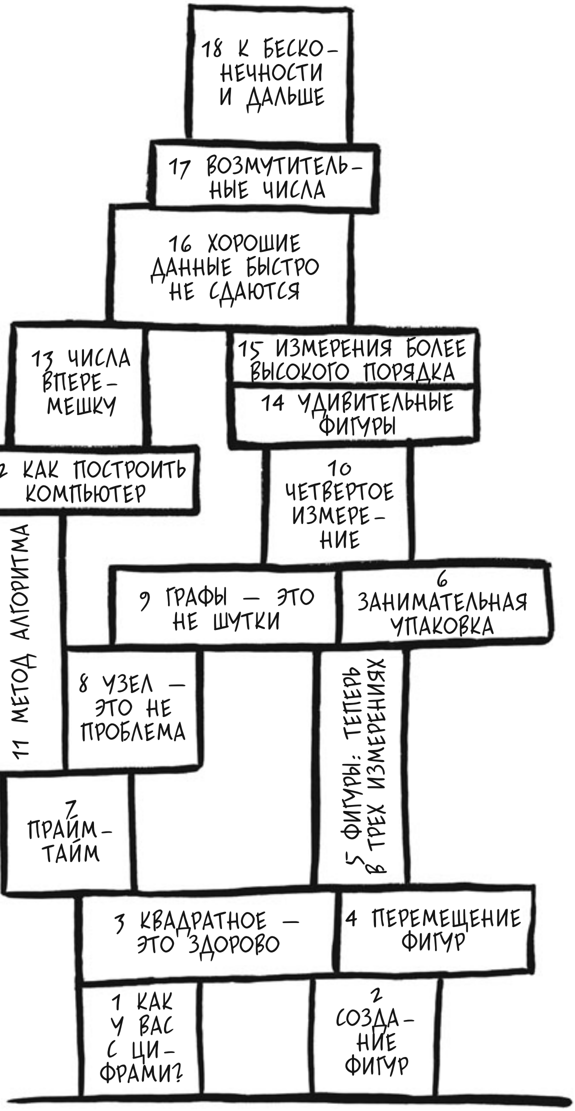
Если вы хорошо разбираетесь с трехмерными фигурами, то вам не составит особого труда разобраться и с четырехмерными. Вы можете представить себе главы этой книги как структуру, в которой каждый элемент покоится на основании, созданном в нескольких предыдущих главах.

Вы можете выбрать свой собственный путь для чтения этой книги. Главное, что нужно сделать, — это убедиться перед началом чтения той или иной главы, что вы ознакомились с предыдущими, на выводах и данных которых основана та, к которой вы приступаете. Книга построена таким образом, что все последующие главы рассматривают всё более продвинутые вопросы, которые редко изучаются в школьных классах. И поначалу это может показаться сложным. Однако если вы движетесь по главам в правильном порядке, то к моменту, когда вы достигнете самых удаленных уголков математического мира, у вас уже будет все необходимое для того, чтобы в полной мере насладиться происходящим.

Прежде всего помните, что главная мотивация для вас как покорителя этой непростой структуры может состоять просто в том, чтобы наслаждаться открывающимися перед вами видами.

Математика слишком долго ассоциировалась исключительно с образованием; теперь же нам нужно увидеть в ней объект удовольствия и исследований. Решая одну математическую загадку или головоломку за другой, мы можем довольно быстро оказаться на вершине и наслаждаться математикой, о существовании которой даже не подозревает большинство людей.

Мы обретем способность играть с вещами, не поддающимися нормальной человеческой интуиции. Математика обеспечивает доступ к миру мнимых чисел и фигур, существующих лишь в 196 883 измерениях, и объектам, простирающимся за пределы бесконечности. Мы сможем увидеть множество интересных вещей — начиная от четвертого измерения и заканчивая трансцендентными числами.



Эту книгу можно представить себе в виде башни, в которой одни главы опираются на другие. Так что выбирайте свой путь с должной мудростью.

1

КАК У ВАС С ЦИФРАМИ?

Во времена моих визитов к стоматологу я пытаюсь чем-то занять свой ум и отвлечься от того факта, что ко мне в рот лезет какой-то незнакомец. Обычно я ищу себе какие-то цифровые головоломки, которые могу решать в уме.

Как-то раз на пути к доктору я попросил в твиттере, чтобы мне набросали хороших математических загадок, для решения которых мне не понадобились бы бумага и ручка. Один друг предложил мне расставить девять цифр таким образом, чтобы первые две представляли число, кратное 2, первые три представляли число, кратное 3, и так далее, пока число, состоящее из девяти цифр, не будет кратно 9. У этой задачи есть всего одно решение.

Устроившись в удобном стоматологическом кресле, я довольно быстро понял, что традиционная и скучная последовательность 1 2 3 4 5 6 7 8 9 не подходит в качестве решения. Хотя 12 делится на 2, а 123 делится на 3, на этом решение заканчивается. Число 1234 не делится на 4.

К моменту завершения зубоврачебных процедур я перебрал множество комбинаций цифр, но, к сожалению, стоматологи редко разрешают пациентам надолго оставаться в кресле и погружаться в размышления. Поэтому я нашел решение уже по дороге домой. Единственным подходившим ответом было число 381 654 729. (Если бы вам было не нужно использовать все девять цифр и вы также могли бы использовать ноль, то у задачи появляются и другие варианты, например 480 006. Благодаря своим свойствам такие числа называются многоделимыми (*polydivisible*). Известно 20 456 многоделимых чисел, самое большое из которых — 3 608 528 850 368 400 786 036 725.)

Интересно отметить, что эта головоломка возможна лишь благодаря тому, что мы в наши дни используем цифры. Если бы вы загадали эту загадку древнему римлянину, то она совершенно никак не помогла бы ему отвлечься во время зубоврачебной процедуры. И дело было не только в том, что римляне использовали другие цифры, такие как V и X. Их цифры имели одно и то же значение вне зависимости от местоположения. V всегда означает 5; X всегда означает 10. С нашими числами все иначе: цифра 2 в составе числа 12 означает 2, но в числе 123 эта же цифра означает 20. К счастью, стоматология во времена Древнего Рима была довольно простой и быстрой.

Когда речь заходит о числовых головоломках, да и о многих других вопросах школьной математики, то я не могу не поделиться с вами одним маленьким секретом. Во многом решение зависит от того, каким образом мы записываем числа. Если в принятой нами числовой системе вы умножаете число 111111111 само на себя, то получаете довольно интересное число 12 345 678 987 654 321 (в котором все цифры сначала идут по нарастающей от 1 до 9, а затем по убывающей). Это же правило работает для других чисел, состоящих из единиц: 11111 × 11111 = 123454321; и 111 × 111 = 12321. Но стоит вам записать числа несколько иным образом, и закономерность исчезает. Число 111 в римских цифрах выглядит как CXI, а результат CXI × CXI выглядит не слишком интересным — XMMCCCXXI.

С помощью этих примеров я хочу показать, насколько велика разница между понятиями *«число»* (*number*) и *«цифра»* (*digit*). К примеру, 3 может считаться одновременно и числом, и цифрой. Выглядят они одинаково, однако обозначают совершенно различные вещи. Число довольно очевидно, оно обозначает количество предметов. 3 — это число; 3435 — это тоже число. Числа представляют собой достаточно абстрактные концепции, и для их записи мы используем цифры. Поэтому цифра — это всего лишь символ для передачи обычного числа на письме, чем-то напоминающий символы, которые мы используем для записи слов. Для написания числа 3435 используются цифры 3, 4 и 5. Всю математику, которую вы изучаете и видите вокруг себя, можно разделить на две категории: реальную математику, основанную на внутренних свойствах; и результаты, представляющие собой всего лишь побочный продукт того способа, которым мы наносим символы на лист бумаги.

Немного хитростей

Думаю, что нам будет хорошо начать с математического фокуса, который называется «Фокус 37» (помимо прочего, это поможет вам не чувствовать себя так, словно вы сидите на школьном уроке математики).

Выберите любую цифру и запишите ее три раза. В результате у вас получится нечто типа 333 или 888. Теперь сложите все эти три цифры: 3+3+3=9 или 8+8+8=24. Пока ничего интересного, правда? А теперь разделите свое изначальное число из трех цифр (333 или 888) на получившуюся сумму (9 или 24). Вы можете делать это в уме или воспользоваться калькулятором (второй вариант наверняка будет быстрее). Вне зависимости от избранного вами метода и изначального числа, ваш ответ будет равен 37. Именно по этой причине данный фокус и получил свое название.

Данный фокус работает для любых цифр. Однако ваш выбор лишь кажется свободным. В любом случае вы получаете один и тот же ответ — 37. Почему? Здесь нужно понять, какие именно алгебраические вычисления происходят за сценой. Если вы пишете одну и ту же цифру три раза, то, по сути дела, умножаете число, которое она обозначает, на 111. Если вы выберете число 8, то число 888 представляет собой результат умножения 8×111. Сложение трех однозначных чисел означает, что вы неявным образом умножаете исходное число на 3: $8+8+8=3\times 8=24$. Таким образом, деление 888 на 24 — это то же самое, что деление 111 на 3, поскольку 8 «вычеркивается» и из числителя, и из знаменателя. И то же самое происходит в случае любой цифры…

…хотя и не всегда. Если бы мы показали этот фокус древнему римлянину, а он выбрал бы число, обозначенное цифрой V, то мы никаким образом не могли бы получить ответ 37 — соответственно, фокус вообще не был бы возможным. К счастью, принятая нами система исчисления на базе десяти цифр используется практически повсеместно, однако, если бы вы хотели поразить жителя Древнего Вавилона, этот трюк вам бы не помог, поскольку в те времена цифры записывались совершенно не так, как сейчас.

Если бы нам нанесли визит какие-нибудь гипотетические инопланетяне, записывавшие свои числа каким-нибудь удивительным и странным образом, они бы тоже вряд ли поняли этот фокус. По сути, он представляет собой комбинацию того, что мы считаем фундаментальными свойствами чисел (которые не меняются вне зависимости от того, каким образом вы их записываете), и причуд принятой нами системы выражения чисел.

Почему это так? 111 делится на 3 вне зависимости от того, каким образом вы записываете числа. CXI делится на III, 百十一 делится на 三, и любые инопланетяне в любом уголке Вселенной знают, что сто одиннадцать всегда будет делиться на три. Ответ всегда будет равен 37 (или XXXVII, или 参拾七, или любым другим значкам, которыми инопланетяне записывают число «тридцать семь»). Если у вас имеется куча из ста одиннадцати камней, то вы всегда сможете разделить ее на три кучки по тридцать семь камней. А поскольку это свойство существует вне зависимости от того, как именно вы выражаете числа, математики считают его одним из самых важных абстрактных свойств.

С другой стороны, тот факт, что троекратное повторение одной и той же цифры есть то же самое, что ее умножение на 111, представляет собой всего лишь непреднамеренный побочный эффект принятой нами системы записи. В римской системе записи написание одной и той же цифры три раза означает ее умножение на 3, а не на 111 (VVV=III×V).

Отчасти сила математики связана с тем, что она выражает универсальную истину, но при этом способна сделать это различными способами.

Древние майя и римляне изучали ту же самую математику, что и мы, однако записывали свои цифры с использованием совершенно иной и непривычной для нас системы. Чтобы адекватно изучить мир математики, нам нужно понимать язык, на котором говорят все обитатели этого мира. Давайте начнем с системы чисел, которую мы используем сейчас — и которую вряд ли стоит считать самой лучшей из возможных.

Что такое число?

До какого самого большого числа вы можете досчитать на пальцах? Большинство людей дойдут до 10 и бросят считать, поскольку у них просто закончатся пальцы. Однако есть люди, которые не удовлетворяются столь ограниченной системой. Они считают на пальцах и вытягивая пальцы, и загибая их. В этом случае вы можете посчитать до 3, используя лишь два первых пальца. Если вы вытянете первый палец, это будет значить 1, второй палец — 2, а оба вытянутых пальца будут обозначать 3. Теперь вы можете поднять свой третий палец (что будет означать 4); затем вы можете поднять третий и первый пальцы для обозначения 5 и так далее. Вы можете дойти до 16 даже прежде, чем вам понадобится задействовать пятый палец на первой руке.

С помощью этой системы вы можете посчитать от 0 до 1023 с помощью ваших обычных десяти пальцев. Однако эта система способна на большее. Если вы будете использовать каждый палец в трех положениях — вытянутый, согнутый наполовину и согнутый полностью, — то сможете посчитать от 0 до 59 048. Мы можем сделать следующий шаг и использовать четыре положения пальца (согнутый и касающийся ладони, согнутый, но не касающийся ладони, согнутый наполовину и полностью вытянутый). В этом случае наш диапазон составит от 0 до 1 048 575. Иными словами, вы можете посчитать на пальцах до миллиона. Это больше чем 100000-кратное улучшение результата в обмен на довольно небольшой риск возникновения артрита.

Но стоит ли на этом останавливаться? Если вы сможете использовать восемь положений для каждого пальца, то это не просто значит, что вы обрели невиданный прежде уровень гибкости: вы теперь можете посчитать от 0 до 1 073 741 823 — до миллиарда с лишним! Разумеется, есть тут и оборотная сторона — слишком изощренная комбинация пальцев вдруг может оказаться секретным жестом, по которому опознают друг друга члены какой-нибудь уличной банды…

Пока что я даже не пытался зайти так далеко, но могу сказать, что при наличии невероятно гибких пальцев и проворного ума у вас практически нет пределов!

Разница между подсчетом на пальцах до 10 и внезапной возможностью досчитать до миллиарда состоит в том, что вместо самих пальцев для нас становится важным их сравнительное положение.

Когда мы считаем до трех с помощью двух первых пальцев вместо «привычного» счета (при котором все пальцы равны, то есть каждый из них обозначает единицу), первый палец, как и прежде, обозначает 1 в поднятом состоянии, а второй в таком же состоянии обозначает 2. Продолжая действовать в том же духе и следуя указаниям, приведенным на рисунке ниже, вы увидите, что третий палец обозначает 4, четвертый — 8, а пятый — 16.

Становится заметной закономерность: значение для каждого пальца в поднятом положении в два раза выше, чем у предыдущего. После ряда экспериментов вы можете понять суть способа представления любого из возможных чисел с помощью пальцев в этих двух положениях (подсказка: самый агрессивный жест получается, когда вы пытаетесь изобразить на пальцах 132. Попробуйте сами… Или лучше не стоит?). Поскольку для каждого пальца существует два положения, такая система счета называется бинарной, или двоичной (в английском языке для нее также существует обозначение *base*-2). При записи чисел вы можете обозначать знаком 0 опущенные пальцы, а знаком 1 — поднятые. Возможно, вы помните из школьных уроков, что в двоичной системе поднятый первый палец означает 1, второй — 2, третий — 4, четвертый — 8 и так далее.

Следующая система счета на пальцах основана на трех различных положениях для каждого пальца (согнутый; наполовину вытянутый — или наполовину согнутый, если вы склонны к пессимизму, — и вытянутый). Эта система известна под названием троичной (или *base*-3). Вы можете развить систему дальше: четыре положения пальца дадут вам четвертичную систему (называемую также кватернальной, или *base*-4); восемь положений — восьмеричную.

Обобщим все вышесказанное (убедитесь, что вы внимательно прочитаете следующую фразу): значение каждого положения, будь то положение пальца или какой-то символ, представляет собой результат произведения предыдущего положения на определенную базу. Таким образом, в троичной системе последовательность выглядит как 1, 3, 9, 27… и мы можем использовать три цифры 0, 1 и 2 для обозначения каждого последующего положения пальца; а, скажем, в восьмеричной системе последовательность выглядит как 1, 8, 64, 512…, а восемь цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 представлены различными положениями пальцев. В восьмеричной системе миллиард может быть представлен в форме 7 346 545 000.

Эти типы систем формируют семейство «позиционных систем счисления», существенно отличающихся от системы римских цифр, в которой положение цифры никак не влияет на значение, которое она призвана обозначать. Цифра V обозначает 5, где бы она ни находилась, а в десятеричной системе цифра 3 в числе 3435 может обозначать как 3000, так и 30, в зависимости от своего местоположения. Римские цифры представляют собой технически переусложненную систему, которая в наши дни используется далеко за пределами своей изначальной мощности. Позиционные системы значительно сильнее, поскольку они позволяют достаточно легко выразить любое, даже очень большое число. Разумеется, в наши дни наиболее широко используется десятеричная система счисления, однако — скажу это еще раз — она представляет собой всего один из множества различных вариантов.

При использовании различных баз появляется много места для путаницы. Я могу перекодировать числа в систему, которая использует совершенно иные цифры, например, перевести его из десятеричной системы в римские цифры (скажем, число 3435 превращается в MMMCDXXXV). Довольно легко понять принцип, по которому создано римское число, — чем-то он напоминает перевод слова на язык, использующий совершенно иной алфавит, например, с английского на японский. Однако если вы переводите слово с английского на индонезийский язык, то, несмотря на одинаковый алфавит, вы можете оказаться в горячей воде вместо теплого воздуха (слово, записанное в английском языке буквами *air*, на индонезийском означает «вода»).

Число «миллиард», представленное как комбинация для восьми положений пальца (знак также известен как тайное приветствие банды математиков).

Не могу удержаться и не рассказать вам о довольно старой уже математической шутке, основанной на подобном недопонимании. Чаще всего ее можно встретить в форме надписи на майках «В мире существует 10 типов людей — те, кто знают, что такое двоичная система счисления, и те, кто этого не знают». Поясню смысл шутки. Набор цифр «10» означает 2 в двоичной системе счисления. Соответственно, лишь знакомые с ней люди понимают, что в надписи идет речь о числе 2, а не 10. Я даю вам пару секунд на то, чтобы вы досмеялись и вновь вернулись к чтению.

Честно говоря, эта шутка уже немного меня достала, потому что я, помимо работы математиком, выступаю на сцене как комик, поэтому вынужден слышать ее *постоянно*. Люди часто подходят ко мне со словами: «Хочу рассказать вам шутку. Не знаю, получится ли донести ее смысл…», а затем пытаются рассказать шутку, которая работает лишь в письменном виде. В том и состоит основная проблема каламбуров: они либо работают, либо нет. Однако, вне зависимости от качества этой шутки, она служит отличным примером того, как можно записывать различные числа одними и теми же цифрами — смотря какую систему вы используете.

Как бы то ни было, мы вынуждены пользоваться десятеричной системой. Многие считают, что это произошло вследствие наличия у нас десяти пальцев: если вы используете свои пальцы в качестве палочек для счета, то вам потребуется «перезагружаться» каждый раз, когда вы досчитываете до 10, и отдельно считать количество раз, когда вы это сделали. Если вам помогает какой-то друг, он может загибать по пальцу после каждого десятка, однако и у него после десяти десятков кончатся свободные пальцы. Соответственно, потребуется кто-то, способный считать сотни. Иными словами, счет десятками и производными от них можно считать достаточно естественным для людей (или, как минимум, для людей, у которых есть друзья). Поскольку древние майя использовали для счета и пальцы ног, у них была распространена двадцатеричная система.

Интересно отметить, что в английском языке одно и то же слово *digit* используется для обозначения и пальцев, и знаков, с помощью которых мы записываем цифры. Разумные создания, живущие где-то еще во Вселенной, могут и не иметь по 10 пальцев; гипотетически они могут иметь вместо рук по три отростка с четырьмя пальцами, напоминающими щупальца, на каждом. Таким образом, эти гипотетические формы жизни могут использовать для работы с цифрами 12-значные системы.

Даже на нашей планете есть некоторое количество протестующих индивидов, считающих, что нам следует переключиться с десятеричной на двенадцатеричную систему. Они много говорят о преимуществах использования дюжин в качестве базы для нашей системы счисления (например, на 12 делится больше чисел, чем на 10, вследствие чего в этих условиях проще работать с долями от целого), однако они зачастую игнорируют некоторые проблемы, которые может вызвать подобный переход. Новая система потребует от нас 12 базовых цифр, поэтому нам придется добавить, к примеру, «A» для обозначения 10 и «B» для обозначения 11. В итоге число 3435 в десятеричной системе превратится в 1BA3 в двенадцатеричной.

Крайне маловероятно, что такой переход когда-либо произойдет. Новые системы остаются игрушками математиков, а подавляющее большинство людей повсеместно используют десятеричную систему.

Единственный пример, когда иные системы счисления перестают быть областью математического любопытства, связан с компьютерами. Двоичная система (или *base*-2) крайне полезна для компьютеров, потому что в ней используется крайне ограниченный набор цифр: вряд ли можно придумать более минималистическую систему, чем система, в которой имеются лишь два знака — 0 и 1. Современные компьютеры спроектированы для работы в ситуациях, когда у них есть всего два варианта. Ток либо течет по проводу в цепи, либо нет. Магнит на жестком диске направлен в сторону либо северного магнитного полюса, либо южного. Таким образом, всё имеет одно из двух значений — 0 или 1. К счастью, в двоичной системе любое число может быть представлено в виде единиц и нулей.

Также мы должны помнить о балансе между ограниченным набором цифр, при котором система будет работать, но который будет при этом достаточно эффективным для записи. Для большинства обладающих интеллектом созданий, будь то люди или гипотетические инопланетяне, вполне достаточно десяти — двенадцати цифр.

Компьютерам для работы необходим ограниченный набор двоичных цифр: все смартфоны, цифровые телевизоры и (даже!) микроволновые печи производят свои, невидимые нам расчеты. Однако когда им необходимо взаимодействие с людьми, они ради нашего удобства довольно благородным образом конвертируют результаты своей работы обратно в десятеричную систему.

Самые первые и довольно простые компьютеры были не столь ориентированы на пользователей. Как-то раз я удостоился чести общаться с пожилым джентльменом. В свои юные годы он был последним студентом-математиком, которому преподавал Алан Тьюринг перед своей смертью в 1954 году. Тьюринг вполне по праву считается «отцом компьютера». В годы работы в Университете Манчестера он написал одну из первых операционных систем для одного из первых компьютеров. По всей видимости, первая операционная система Тьюринга требовала от пользователя умения свободно работать с двоичной системой (сам автор был настоящим мастером в этом деле). Даже когда появилась новая версия операционной системы, способная конвертировать числа из двоичной системы в десятеричную, Тьюринг до последнего настаивал на том, чтобы компьютер перед работой был каждый раз настроен именно на двоичную систему.

Хотя двоичные числа, использующиеся в компьютерах, работают довольно далеко от пользовательских интерфейсов, вы все равно можете заметить следы их присутствия. Это и 16- и 32-гибагайтные карты памяти, а также разрешение экранов, имеющее 1024 пикселя. Люди любят круглые числа — так, мы считаем достаточно привлекательными числа типа 1000 и 1 000 000. Так же ведут себя и компьютеры, с той только разницей, что им нравятся круглые двоичные числа. А поскольку все значения положений в двоичной системе представляют собой различные степени числа 2, вы можете увидеть такие числа буквально повсюду: $2^5=32$, а $2^{10}=1024$.

Иногда компьютеры демонстрируют нам числа из шестнадцатеричной системы, например в паролях для *Wi-Fi*-сетей, однако большинство людей этого не замечает. В *Hexadecimal* — другое забавное название шестнадцатеричной системы — используются символы от 0 до 9, а также буквы от A до F. Эти числа кажутся менее очевидными в сравнении с различными степенями числа 2, однако они тем не менее присутствуют в нашей жизни. Если посмотрите на заднюю крышку *Wi-Fi*-роутера, то увидите, что пароль по умолчанию обычно представляет собой ряд цифр (от 0 до 9) и букв (от *A* до *F*). Точно так же, если вы посмотрите на цифровые значения цветов в программах для рисования или редактирования фотографий, то увидите, что они имеют шестнадцатеричную форму. И конечно же, как вы уже знаете, время от времени между цифрами будут возникать буквы от *A* до *F*.

Шестнадцатеричная форма используется, когда числа необходимо хранить чуть более эффективным образом, чем в бинарной форме, но при этом они должны быть понятны компьютерным программистам и другим подкованным в техническом плане пользователям компьютеров. В этих случаях применяется шестнадцатеричная система. Это может показаться достаточно странным выбором — почему бы просто не ограничиться десятеричной системой? — однако она была выбрана, поскольку 16 представляет собой число 2, возведенное в степень, — а когда одна база представляет собой степень другой, между ними довольно легко переключаться. В обычных условиях, когда вы переходите от одной базы к другой, новые значения для различных положений будут совершенно иными. Однако когда новая база представляет собой степень исходной, некоторые из старых значений положений будут упускаться, но не заменяться новыми. При шестнадцатеричной системе каждая группа из четырех двоичных цифр всегда заменяется на один и тот же уникальный новый символ.

0000 → 0	1000 → 8
0001 → 1	1001 → 9
0010 → 2	1010 → A
0011 → 3	1011 → B
0100 → 4	1100 → C
0101 → 5	1101 → D
0110 → 6	1110 → E
0111 → 7	1111 → F

От двоичной к шестнадцатеричной системе, при которой 1011110000100001 превращается в BC21.

Как только вы поймете суть различных числовых систем, вам будет намного проще понять математику, лежащую в их основе. В сущности, расшифровать чужие цифры намного проще, чем чужие языки.

После того как в XIX веке были заново открыты города древних майя и ученым стали доступны огромные массивы нечитаемых текстов, цифры майя были расшифрованы и переведены в читабельный вид значительно быстрее, чем слова, — несмотря на то что майя использовали странную двадцатеричную систему. Если бы мы встретились с путешествующими по галактике гипотетическими инопланетянами, то, разобравшись с тем, какие символы они