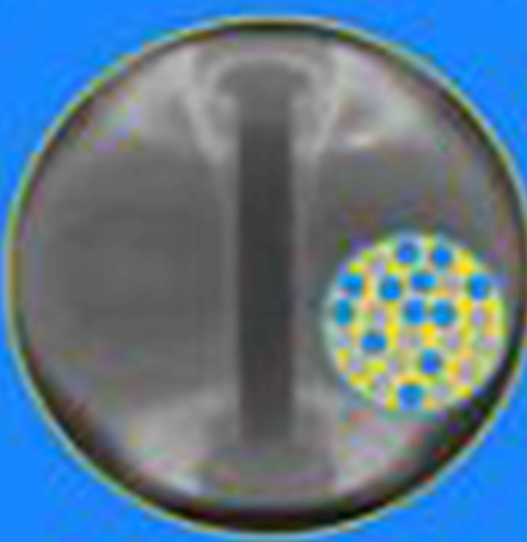
ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

В.М. Жданов



Жданов В.М.

Процессы переноса в многокомпонентной плазме

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 533.932
ББК 22.36
Ж 42

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 08-02-07031

Жданов В. М. **Процессы переноса в многокомпонентной плазме.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 280 с. — ISBN 978-5-9221-1052-5.

Монография посвящена классической кинетической теории процессов переноса в многокомпонентной плазме. Рассматриваются методы получения уравнений переноса и выражений для коэффициентов переноса в неизотермической многосортной плазме, находящейся во внешних электрическом и магнитном полях. В книге систематически применяется известный в кинетической теории метод моментов Грэда, который обобщается на случаи многотемпературной многокомпонентной плазмы, а также молекулярного газа. Демонстрируется ряд преимуществ применения этого метода по сравнению с часто используемым методом Чепмена–Энскога. Показана возможность выхода за пределы обычно используемого приближения 13 моментов, что обеспечивает необходимую точность расчета коэффициентов переноса. Приведены примеры практического использования полученных результатов: электропроводность и эффект Холла в МГД-генераторах, диффузия плазмы поперек сильного магнитного поля, неоклассический перенос частиц и тепла в тороидальных системах магнитного удержания плазмы.

Для специалистов, работающих в области практических применений низкотемпературной газоразрядной плазмы, высокоионизованной плазмы установок термоядерного синтеза, а также исследований ионосферной плазмы. Структура и содержание книги позволяют использовать ее и в качестве пособия при изучении физики плазмы студентами старших курсов и аспирантами соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-1052-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

ВВЕДЕНИЕ 9

Глава 1. **Кинетическое уравнение** 14

1.1. Функция распределения и макроскопические параметры плазмы . . 14

1.2. Кинетическое уравнение Больцмана 17

1.3. Эффективные сечения рассеяния 24

1.4. Интеграл столкновений для заряженных частиц 33

Глава 2. **Уравнения переноса** 37

2.1. Общее уравнение переноса 37

2.2. Уравнения сохранения 41

2.3. Уравнение баланса энтропии 45

2.4. Многотемпературные и многожидкостные модели плазмы. 49

2.5. Неравновесная термодинамика многокомпонентной плазмы 52

2.6. Неравновесная термодинамика многожидкостной плазмы 59

Глава 3. **Квазигидродинамическое приближение** 62

3.1. Средняя передача импульса и энергии при столкновениях частиц 62

3.2. Обобщенный закон Ома для частично ионизованной трехкомпонентной плазмы 67

3.3. Формальное решение уравнений многокомпонентной диффузии в плазме. 71

3.4. Обобщенный закон Ома для многокомпонентной плазмы 73

3.5. Диффузия в слабоионизованном газе. 77

3.6. Поперечный перенос частиц в замагниченной плазме. 82

Глава 4. **Метод Грэда** 86

4.1. Разложение функции распределения 86

4.2. Приближение $13N$ моментов 90

4.3. Линейные соотношения переноса 96

4.4. Однотемпературная плазма 97

4.5. Двухтемпературная плазма 102

4.6. Высшие приближения метода моментов 105

4.7. Связь с результатами метода Чепмена–Энскога. 112

Глава 5. **Явления переноса в многокомпонентной газовой смеси** . . 117
5.1. Исходная система уравнений 117
5.2. Тензор вязких напряжений и поток тепла 120
5.3. Диффузия в многокомпонентной смеси 127
5.4. Бародиффузия в вязком потоке. 130
5.5. Производство энтропии. Обобщенная неравновесная термодинамика газовой смеси 133

Глава 6. **Явления переноса в многосортной плазме** 138
6.1. Многосортная неизотермическая плазма в магнитном поле 138
6.2. Отделение уравнений для электронов и тяжелых частиц. Электронные свойства переноса 142
6.3. Учет высших приближений при расчете электронных свойств переноса. 149

Глава 7. **Двухтемпературный частично ионизованный газ** 156
7.1. Тензор вязких напряжении 156
7.2. Потоки тепла 161
7.3. Диффузионные потоки 165

Глава 8. **Многосортная полностью ионизованная плазма** 170
8.1. Исходные уравнения. 170
8.2. Явления переноса в простой плазме 174
8.3. Поперечные свойства переноса в замагниченной плазме 181
8.4. Продольные составляющие сил трения и потоков тепла. Продольная вязкость 185
8.5. Диффузия и перенос тепла в тороидальных системах в режиме Пфирша–Шлютера 191

Глава 9. **Некоторые практические приложения** 201
9.1. Электропроводность плазмы МГД-генератора 201
9.2. Разделение компонентов смеси во вращающейся плазме 206
9.3. Температурное экранирование примесей в полностью ионизованной многосортной плазме 210
9.4. Радиальный перенос частиц и тепла примесей в режиме Пфирша–Шлютера 213

Глава 10. **Явления переноса при учете внутренних степеней свободы молекул**. 218
10.1. Общие замечания 218
10.2. Макроскопические параметры и уравнения сохранения для многоатомной газовой смеси 220

10.3. Разложение функции распределения и уравнения переноса 224
10.4. Явления переноса и релаксации в простом многоатомном газе. . . . 229
10.5. Двухтемпературное приближение. Уравнение релаксации внутренней энергии 233
10.6. Оценки вклада неупругих столкновений в кинетические коэффициенты 237
10.7. Теплопроводность молекулярных газов 240
10.8. Явления переноса в многоатомных газовых смесях 242
10.9. Релаксация энергии и объемная вязкость смеси 249

Приложение I. Общая система уравнений моментов 254
Приложение II. Значения парциальных интегральных скобок, выраженные через интегралы $\Omega_{\alpha\beta}^{\ell r}$ 262
Приложение III. Выражения для элементов q^{nk} и p^{nk} 265

Список литературы 268

Предисловие

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена классической кинетической теории процессов переноса в многокомпонентной плазме. Термин «процессы переноса» относится, как известно, к описанию переноса массы, импульса и энергии в среде под влиянием ее пространственной неоднородности (градиентов плотности, скорости и температуры), а также внешних полей (например, гравитационного или электрического и магнитного). Классическое описание этих явлений в разреженном газе и плазме тесно связано с концепцией парных взаимодействий частиц, что определяет существенную роль интеграла столкновений в используемых в теории кинетических уравнениях, независимо от того записывается ли он в обычной форме Больцмана, как в случае газа нейтральных частиц, или в форме Ландау для кулоновского взаимодействия заряженных частиц. Результаты, получаемые в рамках классической теории, относятся главным образом к таким неравновесным состояниям системы, когда макроскопические параметры газа или плазмы слабо меняются на расстояниях и за времена порядка средней длины свободного пробега и времени между столкновениями частиц. При этом считается, как правило, что плазма помещена в однородное и прямолинейное электрическое и магнитное поля. Вместе с тем, в присутствии неоднородного и изогнутого магнитного поля (такого, например, которое используется в тороидальных системах магнитного удержания плазмы), становится возможным нетривиальное обобщение результатов классической теории, позволяющее описывать специфический перенос частиц и энергии в таких системах («неоклассическая теория процессов переноса»). Разумеется, вне сферы действия классической теории остаются при этом различные виды аномального переноса в плазме, обусловленные коллективными эффектами (такими как неустойчивость и турбулентность).

Настоящая книга представляет собой существенно переработанное и дополненное издание монографии автора «Явления переноса в многокомпонентной плазме», которое вышло в свет в 1982 году в издательстве Энергоиздат [1]. В 2002 году этот новый вариант книги был опубликован издательством Tailor & Francis на английском языке [2]. Предлагаемое издание книги на русском языке по своему основному содержанию мало отличается от английского издания, лишь в некоторых его разделах сделаны небольшие дополнения.

Как известно, реальная плазма, применяемая в ряде экспериментальных и технических устройств, так же как и плазма естественного происхождения (например, ионосферная), практически всегда оказываются многокомпонентными. Так, даже в сравнительно «чистой» водородной плазме установок термоядерного синтеза заметная роль принадлежит примесям, поступающим со стенок разрядной камеры, которые существенно определяют излучение, электропроводность и другие параметры плазмы. С многокомпонентностью состава приходится считаться при исследовании плазмы продуктов сгорания, используемой в канале магнитогидродинамических генераторов энергии, при рассмотрении газоразрядной плазмы и во многих других случаях.

Насколько известно автору, за прошедшие 25 лет со дня первого издания книги не было опубликовано новых монографий, посвященных собственно многокомпонентной плазме, что делает вполне своевременным появление расширенного варианта книги, учитывающего в том числе и последние результаты в этой области. В новом издании автор стремился дать более подробное рассмотрение ряда традиционных вопросов, позволяющее приблизить изложение в некоторых главах к тексту, который может оказаться полезным в качестве учебного пособия для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей. В отдельные главы выделен материал, относящийся к явлениям переноса в многокомпонентной смеси нейтральных атомов и молекул, а также к практическим применениям теории многокомпонентных ионизованных газов. Появились новые разделы, посвященные неравновесной термодинамике многокомпонентной плазмы. Все это заметно увеличило объем книги по сравнению с изданием 1982 года.

Отметим некоторые особенности настоящей книги, отличающие ее от известных монографий по кинетической теории газа и плазмы. В большинстве из них в качестве основных методов рассмотрения процессов переноса используются, как правило, или традиционный метод Чепмена–Энскога, или метод разложения функции распределения частиц по тензорным сферическим гармоникам. В настоящей книге, как и в ее первом издании, при анализе явлений переноса систематически применяется предложенный Грэдом в 1949 году метод моментов. Обобщение этого метода на случай многокомпонентной газовой смеси и неизотермической многосортной плазмы было выполнено в целом ряде работ, начиная с 1960-х годов. С самого начала своей научной деятельности автор являлся убежденным сторонником последовательного применения этого метода при рассмотрении процессов переноса в газах и плазме, что нашло отражение в ряде соответствующих публикаций. Эффективность метода Грэда (метода эрмитовых моментов) была затем продемонстрирована в известном обзоре Хиршмана и Сигмара [3], посвященном неоклассической теории процессов переноса в полностью ионизованной плазме, и позднее в вышедшей в 1988 г. двухтомной монографии Раду Балеску [4] по классической и неоклассической теориям процессов переноса в двухкомпонентной полностью ионизованной плазме. Вместе с тем, преимущества этого метода особенно наглядно проявляются при применении его в случае именно многокомпонентных систем, образованных из произвольного числа сортов заряженных и нейтральных частиц (в том числе молекул, обладающих внутренними степенями свободы).

Другая особенность книги состоит в том, что наряду с анализом электронных свойств переноса, чему уделяется часто основное внимание в монографиях по физике плазмы, в настоящем издании значительное место отведено рассмотрению явлений переноса, связанных с тяжелыми частицами (ионами и атомами либо молекулами). Помимо частично ионизованной газовой смеси, свойства которой важны при анализе процессов в магнитогидродинамических устройствах и газоразрядных приборах, а также в ионосферной плазме, заметный интерес представляет исследование явлений переноса в полностью ионизованной плазме с несколькими сортами ионов, что имеет непосредственное отношение к проблеме диффузии примесей поперек магнитного поля в различных системах магнитного удержания плазмы. В последние годы обнаружилось важное практическое применение этих результатов также в проблеме описания процессов, происходящих в пристеночной плазме токамаков (Edge plasma).

В некоторых разделах книги использованы результаты, полученные автором совместно с М.Я. Алиевским, В.А. Полянским и П.Н. Юшмановым, которым автор выражает свою искреннюю признательность. Автор благодарен Ю.Л. Климонтовичу, А.А. Рухадзе и Вернеру Эбелингу, ознакомившихся с рукописью еще перед ее изданием за рубежом, за ряд полезных замечаний по содержанию книги. Я хочу также выразить сердечную благодарность моей жене Галине за понимание и терпение, проявленные ею в период моей работы над рукописью книги.

Литература

1. *Жданов В.М.* Явления переноса в многокомпонентной плазме. М.: Энергоиздат, 1982.
2. *Zhdanov V.M.* Transport processes in multicomponent plasma. New York-London: Tailor & Francis, 2002.
3. *Hirshman S.P., Sigmar D.T.* // Nucl. Fusion. 1981. V. 21. P. 1079.
4. *Balescu R.* Transport processes in plasmas. V. 1, 2. North Holland. Amsterdam, 1988.

ВВЕДЕНИЕ

Под термином «многокомпонентная плазма», принятым в настоящей книге, подразумевается частично или полностью ионизованная газовая смесь, образованная из произвольного числа сортов заряженных и нейтральных частиц и удовлетворяющая условию квазинейтральности.

Особенности коллективного кулоновского взаимодействия между заряженными частицами, а также присутствие электрического и магнитного полей приводят к большему разнообразию явлений в ионизованных газах по сравнению с обычной газовой смесью, однако, общие кинетические методы анализа, развитые для газов, находят широкое применение и в случае плазмы. Это относится, в первую очередь, к явлениям электропроводности, диффузии, вязкости и теплопроводности плазмы, объединяемым под общим названием «явления переноса».

Исходным при рассмотрении процессов переноса в газах является обычно классическое кинетическое уравнение Больцмана. Именно на базе этого уравнения создана сравнительно законченная теория процессов переноса для разреженных одноатомных газов и газовых смесей, в рамках которой обосновывается вывод гидродинамических уравнений переноса и получены выражения, позволяющие рассчитывать все необходимые кинетические коэффициенты (коэффициенты переноса). Основные результаты, относящиеся к этой области, достаточно хорошо известны и отражены в книгах [1–4].

Затруднения в теории, возникающие из-за присутствия в газе заряженных частиц, связаны, как известно, с расходимостью некоторых интегралов, через которые выражается эффективное сечение столкновений для кулоновского потенциала. На практике эти затруднения устраняют использованием экранированного кулоновского потенциала либо с помощью формального обрезания параметра столкновений (прицельного расстояния) на длине порядка радиуса Дебая. Строгая теория плазмы, развитая в 1960–70-х годах и основанная на выводе кинетического уравнения из уравнения Лиувилля, позволила дать более последовательный учет влияния многих частиц на процесс столкновения заряженных частиц в плазме [5–8]. При этом, с одной стороны, определяются границы применимости интегралов столкновений Больцмана и Ландау, использование которых существенно связано с концепцией экранирования кулоновского поля зарядов, а с другой — возникает возможность рассматривать более общие кинетические уравнения, учитывающие динамическую поляризацию среды, что оказывается существенным при рассмотрении сильно неравновесных состояний плазмы. Новые эффекты проявляются и при учете вклада в интеграл столкновений крупномасштабных флуктуаций [8], что сказывается, в частности, на значениях кинетических коэффициентов плазмы, находящейся в турбулентном состоянии.

В вопросах, обсуждаемых в настоящей книге, эти эффекты не играют заметной роли, поскольку при рассмотрении явлений переноса мы предполагаем, что отклонения плазмы от состояний локального термодинамического равновесия оказываются, как правило, малыми. По этой причине к ее описанию вполне применимы обычные методы, основанные на решении кинетического уравнения Больцмана с использованием концепции дебаевского экранирования поля заряженных частиц. При таком подходе кинетическая теория явлений переноса в плазме оказывается простым обобщением теории, развиваемой для газовой смеси, в которой электроны и ионы рассматриваются наряду с атомами (или молекулами) как независимые компоненты смеси и, вместе с тем, учитываются особенности поведения заряженных частиц во внешних электрическом и магнитном полях [1, 3, 9–11].

При статистическом описании плазмы на уровне одночастичного приближения ее состояние полностью определяется заданием функции распределения $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$, которая представляет собой плотность числа частиц сорта α в шестимерном фазовом пространстве с координатами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $\mathbf{r}$ — ее координата, t — время. В дальнейшем нас будет интересовать, главным образом, макроскопическое поведение плазмы. Макроскопические параметры компонентов плазмы определяются при этом как некоторые моменты по скоростям от функции распределения. Цепочка уравнений для моментов вытекает непосредственно из кинетического уравнения, которому удовлетворяет f_α, если умножить последнее на некоторую последовательность ортогональных тензорных полиномов от скорости частиц и проинтегрировать по пространству скоростей. По той же бесконечной последовательности полиномов можно разложить и саму функцию распределения, выбрав в качестве нулевого приближения (весовой функции) распределение, соответствующее какому-либо известному состоянию газа. В обычном методе Грэда [12–14] в качестве нулевого приближения выбирается локальное максвелловское распределение, а в качестве полиномов используются тензорные полиномы Эрмита от безразмерной скорости частиц. Коэффициенты разложения в силу условий ортогональности для полиномов оказываются при этом выраженными через соответствующие моменты функции распределения. Ограничиваясь в разложении конечным числом членов, мы получаем возможность выразить моменты более высокого порядка через совокупность моментов, оставленных в разложении, и тем самым сделать систему уравнений моментов замкнутой. В этом и состоит существо метода моментов, обобщение которого на случай многокомпонентной плазмы и молекулярного газа будет использоваться нами в последующем изложении.

Уравнения моментов или уравнения переноса заметно упрощаются, если использовать определенные условия макроскопичности плазмы, отвечающие предположению о слабом изменении параметров плазмы на расстояниях и за времена порядка средней длины свободного пробега и среднего времени между столкновениями частиц. Мы приходим при этом к линейным соотношениям переноса, связывающим значения неравновесных макроскопических параметров плазмы с градиентами основных гидродинамических переменных, а также с внешними силами, действующими на частицы. Коэффициенты пропорциональности в этих соотношениях соответствуют так называемым кинетическим коэффициентам или коэффициентам переноса, вычисление которых составляет одну из задач настоящей книги.

Наиболее часто используемым приближением метода Грэда является приближение 13 моментов [12–16]. В разложении функции распределения оказываются оставленными при этом только те моменты, которые имеют явный физический смысл. С использованием этого приближения в ряде работ была развита кинетическая теория явлений переноса в частично ионизованной плазме [17–21]. В применении к слабо неравновесным и медленно меняющимся состояниям плазмы приближение 13 моментов дает все необходимые линейные соотношения переноса, однако в некоторых случаях не обеспечивает достаточной точности при расчете кинетических коэффициентов. По-видимому, именно это обстоятельство послужило причиной, из-за которой метод моментов получил заметно меньшее применение в кинетической теории плазмы по сравнению с известным методом Чепмена–Энскога [1–3] или методом разложения по сферическим гармоникам [9–11]. В настоящей книге показано, что использование линеаризованных моментов более высокого порядка позволяет и в рамках метода Грэда вычислять кинетические коэффициенты практически с той же степенью точности, которая дается другими методами, при сохранении всех остальных преимуществ моментного метода решения кинетического уравнения.

Остановимся кратко на основном содержании книги.

Первые три главы являются вводными. В главе 1 рассматривается вывод кинетического уравнения Больцмана для многокомпонентной газовой смеси и плазмы и обобщение этого уравнения с учетом внутренних степеней свободы молекул. Детально обсуждаются эффективные сечения упругого рассеяния частиц в плазме, проблема устранения расходимости в сечениях кулоновского взаимодействия частиц, интеграл столкновений заряженных частиц.

Глава 2 посвящена выводу общего уравнения переноса для многокомпонентной плазмы, уравнениям сохранения, а также обоснованию многотемпературных и многожидкостных моделей плазмы. Специальный раздел главы отводится обсуждению неравновесной термодинамики многокомпонентной плазмы.

Многие важные особенности макроскопического поведения плазмы во внешних полях могут быть поняты на основе так называемого квазигидродинамического приближения, которое рассматривается в гл. 3. Это приближение используется для вывода уравнений диффузии и обобщенного закона Ома в случае произвольной многокомпонентной плазмы, а также при анализе диффузии в слабо ионизованной плазме и поперечного переноса частиц в замагниченной, полностью ионизованной плазме.

Глава 4 посвящена систематическому изложению существа метода моментов Грэда и его применению для получения системы макроскопических уравнений переноса в неизотермической многокомпонентной плазме и следующих из них линейных соотношений переноса. Здесь же подробно обсуждаются приближения однотемпературной и двухтемпературной плазмы. На основе линеаризованного кинетического уравнения Больцмана демонстрируется возможность использования более высоких приближений метода моментов при расчете кинетических коэффициентов плазмы и связь получаемых выражений с известными результатами метода Чепмена–Энскога.

В главе 5 рассматриваются явления переноса в однотемпературной многокомпонентной газовой смеси в отсутствие магнитного поля. Приведенные здесь соотношения, особенно те, которые имеют отношение к переносу тепла, диффузии, баро- и термодиффузии в многокомпонентной смеси, а также более простая структура выражений для ряда кинетических коэффициентов смеси, имеют ряд преимуществ по сравнению с результатами, получаемыми в рамках традиционного метода Чепмена–Энскога.

Главы 6–8 посвящены процессам переноса в неизотермической многосортной плазме в присутствии магнитного поля. Наряду с получением общих выражений для тензора вязких напряжений, потока тепла и диффузионных потоков компонентов в гл. 6 обосновывается способ отделения уравнений переноса для электронов от уравнений для тяжелых частиц, что позволяет рассчитывать электронные свойства переноса независимо от других свойств в любом приближении метода. В главах 7 и 8 детально анализируются процессы переноса в двухтемпературном частично ионизованном газе и в многосортной полностью ионизованной плазме, состоящей из электронов и нескольких сортов ионов, каждый из которых может находиться в различных зарядовых состояниях. При этом используется приближение к функции распределения частиц плазмы, соответствующее по точности расчета кинетических коэффициентов известным результатам Брагинского для простой плазмы. Отдельный параграф посвящен применению полученных результатов к анализу диффузии и переноса тепла в тороидальных системах магнитного удержания плазмы для так называемого режима Пфирша–Шлютера.

В главе 9 рассматриваются некоторые примеры практического применения полученных в предыдущих главах результатов: электропроводность и эффект Холла в МГД-генераторах, явления переноса во вращающейся плазме, неоклассический перенос частиц и тепла тяжелых примесей в тороидальных системах. Выбор примеров в значительной степени произволен и призван продемонстрировать различные аспекты приложения результатов кинетической теории многокомпонентной плазмы к конкретным задачам.

Последняя десятая глава книги посвящена явлениям переноса в газовых смесях при учете внутренних степеней свободы молекул. Основное внимание уделяется здесь выводу уравнений переноса и выражений для кинетических коэффициентов, связанных с вращательным и колебательным возбуждением тяжелых частиц. Применимость полученных результатов ограничена при этом случаем слабоионизованной молекулярной газовой смеси, в которой процессы неупругих взаимодействий, связанные с электронным возбуждением, ионизацией, рекомбинацией и т. д. могут еще не приниматься во внимание.

В данной книге используется Международная система единиц измерений СИ. Температура измеряется в кельвинах.

Глава 1

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

1.1. Функция распределения и макроскопические параметры плазмы

Состояние плазмы может быть описано с помощью одночастичной функции распределения $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$. Последняя определяется таким образом, что $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}$ представляет собой среднее число частиц сорта α, которые находятся в момент времени t в окрестности точки $\mathbf{r}$ элемента объема $d\mathbf{r} = dx\, dy\, dz$ и обладают скоростью около значения $\mathbf{v}$ из интервала $d\mathbf{v} = dv_x\, dv_y\, dv_z$.

Основные макроскопические параметры компонентов плазмы — числовая плотность n_α, массовая плотность ρ_α, средняя скорость $\mathbf{u}_\alpha$ и температура T_α вводятся с помощью соотношений

$$\begin{gathered} n_\alpha = \int f_\alpha\, d\mathbf{v}, \qquad \rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha = \int m_\alpha f_\alpha\, d\mathbf{v}, \\ n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int \mathbf{v} f_\alpha\, d\mathbf{v}, \qquad \frac{3}{2} n_\alpha k T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f_\alpha\, d\mathbf{v}. \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

Здесь m_α — масса частицы сорта α, k — постоянная Больцмана.

Параметры плазмы в целом — концентрация n, плотность ρ, среднемассовая скорость $\mathbf{u}$ и температура T находятся соответствующим суммированием по α, так что

$$n = \sum_\alpha n_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha, \quad \rho\mathbf{u} = \sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \quad nT = \sum_\alpha n_\alpha T_\alpha. \tag{1.1.2}$$

Используем в качестве новой переменной собственную скорость частицы, $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Тогда, вводя определение диффузионной скорости, $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}$, имеем

$$\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = m_\alpha \int \mathbf{c} f_\alpha \, d\mathbf{v}, \tag{1.1.3}$$

где $\mathbf{J}_\alpha$ — массовый диффузионный поток частиц сорта α. Из определения среднемассовой скорости $\mathbf{u}$ при этом следует, что

$$\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0. \tag{1.1.4}$$

Введем теперь определения для парциального и полного тензоров давлений:

$$P_{\alpha\, rs} = m_\alpha \int c_r c_s f_\alpha \, d\mathbf{v}, \quad P_{rs} = \sum_\alpha P_{\alpha\, rs}. \tag{1.1.5}$$

По физическому смыслу $P_{\alpha\, rs}$ (1.1.5) представляет собой плотность потока импульса частиц сорта α. Выделяя диагональную часть тензора, представим его в виде

$$P_{\alpha\, rs} = p_\alpha \delta_{rs} + \pi_{\alpha\, rs}, \tag{1.1.6}$$

где

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha = \frac{m_\alpha}{3} \int c^2 f_\alpha \, d\mathbf{v}, \quad \pi_{\alpha\, rs} = m_\alpha \int \left(c_r c_s - \frac{1}{3}\, \delta_{rs} c^2 \right) f_\alpha \, d\mathbf{v}. \tag{1.1.7}$$

Величина p_α имеет смысл парциального давления частиц сорта α в плазме, $\pi_{\alpha rs}$ соответствует парциальному тензору вязких напряжений. Для плазмы в целом

$$P_{rs} = p\, \delta_{rs} + \pi_{rs}, \quad p = \sum_\alpha p_\alpha = nkT, \quad \pi_{rs} = \sum_\alpha \pi_{\alpha\, rs}. \tag{1.1.8}$$

Введем еще вектор плотности потока кинетической энергии частиц сорта α, который называют обычно вектором потока тепла

$$\mathbf{q}_\alpha = \int \frac{mc^2}{2}\, \mathbf{c}\, f_\alpha \, d\mathbf{v}. \tag{1.1.9}$$

Для полного потока тепла в плазме $\mathbf{q}$ имеем

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha = \sum_\alpha \int \frac{m_\alpha c^2}{2}\, \mathbf{c}\, f_\alpha \, d\mathbf{v}. \tag{1.1.10}$$

Заметим, что введенные нами макроскопические параметры представляют собой фактически первые несколько моментов функции распределения. Общее определение момента имеет вид

$$M^{(n)}_{\alpha\, r_1 \ldots r_n} = m_\alpha \int c_{r_1} \ldots c_{r_n} f_\alpha \, d\mathbf{v}. \tag{1.1.11}$$

При этом плотность ρ_α представляет собой момент нулевого порядка, массовый диффузионный поток $\mathbf{J}_\alpha$ — момент первого порядка, парциальный тензор давлений $P_{\alpha\, rs}$ — момент второго порядка и удвоенный тепловой поток $2q_{\alpha\, r} = M^{(3)}_{\alpha\, rss}$ — сокращенный момент третьего порядка.

Выше фактически предполагалось, что все частицы, составляющие плазму, являются бесструктурными. Однако в реальной многокомпонентной плазме могут присутствовать возбужденные атомы, молекулы и молекулярные ионы, которые обладают в общем случае несколькими видами внутреннего движения, соответствующего электронным, вращательным и колебательным степеням свободы. Их наличие можно формально учитывать в определении функции распределения, используя обобщенный индекс i, который в свою очередь, подразделяется на индексы $i_1, i_2, \ldots$, где совокупность $\{i_\nu\}$ отвечает полному набору квантовых чисел для ν-го вида внутренних степеней свободы. При таком полуклассическом способе описания (поступательные степени свободы трактуются классически, а внутренние — квантово-механически) состояние плазмы можно характеризовать с помощью функции распределения $f_{\alpha\, i}\,(\mathbf{v}, \mathbf{r}, i, t)$.

В определение всех интересующих нас макроскопических величин должно входить в этом случае суммирование по индексу i, например,

$$n_\alpha = \sum_i \int f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}, \quad n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum_i \int \mathbf{v} f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}. \tag{1.1.12}$$

Аналогично определяется парциальный тензор давлений

$$P_{\alpha\, rs} = \sum_i \int m_\alpha c_r c_s f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}. \tag{1.1.13}$$

При этом диагональная часть тензора $P_{\alpha\, rs}$ уже не совпадает с обычным (гидростатическим) парциальным давлением. Как и раньше, будем использовать соответствующее разбиение тензора

$$P_{\alpha\, rs} = P_\alpha \delta_{rs} + \pi_{\alpha\, rs}, \tag{1.1.14}$$

где

$$\begin{gathered} P_\alpha = \frac{m_\alpha}{3} \sum_i \int c^2 f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}, \\ \pi_{\alpha\, rs} = m_\alpha \sum_i \int \left(c_r c_s - \frac{1}{3}\, \delta_{rs} c^2 \right) f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}. \end{gathered} \tag{1.1.15}$$

Существенные уточнения возникают при определении температуры плазмы. Строго говоря, вместо T_α целесообразно использовать понятие средней энергии частиц сорта α в единице объема плазмы, которая складывается из средних энергий, отвечающих поступательным и внутренним степеням свободы частиц:

$$n_\alpha E_\alpha = n_\alpha E_\alpha^{\text{tr}} + n_\alpha E_\alpha^{\text{int}}, \qquad (1.1.16)$$

где

$$n_\alpha E_\alpha^{\text{tr}} = \sum_i \int \frac{m_\alpha c^2}{2} f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}, \quad n_\alpha E_\alpha^{\text{int}} = \sum_i \int E_{\alpha\, i} f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}. \qquad (1.1.17)$$

Здесь $E_{\alpha i}$ — внутренняя энергия частицы сорта α, находящейся в i-м квантовом состоянии. Легко заметить, что

$$P_\alpha = \frac{2}{3} n_\alpha E_\alpha^{\text{tr}}. \qquad (1.1.18)$$

Полная средняя энергия единицы объема плазмы определяется тогда, как

$$nE = \sum_\alpha n_\alpha E_\alpha = \sum_\alpha \sum_i \int \left(\frac{m_\alpha c^2}{2} + E_{\alpha\, i} \right) f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}. \qquad (1.1.19)$$

Именно этой величиной, как мы увидим (см. гл. 2 и 10), определяется полная температура молекулярной плазмы T для слабонеравновесных состояний.

Наконец, при определении вектора потока тепла частиц сорта α необходимо учитывать потоки энергии, связанные с переносом как поступательной, так и внутренней энергии частиц. При этом

$$\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha^{\text{tr}} + \mathbf{q}_\alpha^{\text{int}}, \qquad (1.1.20)$$

где

$$\mathbf{q}_\alpha^{\text{tr}} = \sum_i \int \frac{m_\alpha c^2}{2} \mathbf{c} f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}, \quad \mathbf{q}_\alpha^{\text{int}} = \sum_i \int E_{\alpha\, i}\, \mathbf{c} f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}. \qquad (1.1.21)$$

Для полного потока тепла имеем

$$\mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha = \sum_\alpha \sum_i \int \left(\frac{m_\alpha c^2}{2} + E_{\alpha\, i} \right) \mathbf{c} f_{\alpha\, i}\, d\mathbf{v}. \qquad (1.1.22)$$

1.2. Кинетическое уравнение Больцмана

Эволюция одночастичной функции распределения $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ в пространстве и времени описывается с помощью так называемого кинетического уравнения. Если рассматривать плазму просто как многокомпонентную газовую смесь нейтральных и заряженных частиц, помещенную во внешнее силовое поле, то в основу анализа неравновесных явлений в ней может быть положено известное кинетическое уравнение Больцмана [1, 2], которое записывается в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = J_\alpha, \tag{1.2.1}$$

где ∇ и $\nabla_{\mathbf{v}}$ — соответственно операторы градиентов по переменным $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_\alpha$ — внешняя сила, действующая на частицу сорта α.

Левая часть (1.2.1) фактически представляет собой полную производную по времени Df_α/Dt при дифференцировании вдоль траектории частицы в шестимерном фазовом пространстве. В отсутствие столкновений, в соответствии с теоремой Лиувилля, $Df_\alpha/Dt = 0$. Наличие столкновений приводит к нарушению этого условия, так как в результате каждого столкновения (рассматриваемого как точечное) частица резко меняет свою скорость, т. е. исчезает в одной точке фазового пространства скоростей и появляется в другой. Это обстоятельство учитывается в правой части уравнения (1.2.1) введением интеграла столкновений J_α.

Больцмановский интеграл столкновений учитывает лишь парные столкновения частиц, иными словами, при его выводе полностью пренебрегается возможными взаимодействиями трех частиц одновременно, а также и более сложных комплексов. Напомним основные соображения, используемые при получении выражения для J_α .

Заметим, прежде всего, что при учете различных пар взаимодействующих частиц в многокомпонентной плазме

$$J_\alpha = \sum_\beta J_{\alpha\beta}, \tag{1.2.2}$$

где $J_{\alpha\beta}$ — интеграл столкновений частиц сортов α и β.

Будем учитывать только упругие столкновения частиц. В этом случае последние рассматриваются как классические точечные центры сил. Считается, кроме того, что любые внешние силы, действующие на частицы, очень малы по сравнению с силами межчастичного взаимодействия, т. е. их влиянием на динамику столкновения можно пренебречь.

Для столкновения двух частиц с массами m_α и m_β могут быть записаны законы сохранения импульса и энергии,

$$m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_{1\beta} = m_\alpha \mathbf{v'}_\alpha + m_\beta \mathbf{v'}_{1\beta}, \tag{1.2.3}$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta v_{1\beta}^2 = \frac{1}{2} m_\alpha {v'}_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta {v'}_{1\beta}^2, \tag{1.2.4}$$

где штрихом отмечены значения скоростей после столкновения, а индекс «1» вводится, чтобы отличить сталкивающиеся частицы при $\alpha = \beta$. Понятия «до» и «после» столкновения соответствуют начальному и конечному этапу свободного движения частиц, когда влияние взаимодействия частиц на их движение оказывается несущественным.

Удобно ввести скорость центра масс пары частиц, которая не изменяется в процессе столкновения,

$$\mathbf{G} = \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} = \frac{m_\alpha \mathbf{v'}_\alpha + m_\beta \mathbf{v'}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \tag{1.2.5}$$

и относительные скорости частиц до и после столкновения:

$$\mathbf{g} = \mathbf{v}_{1\beta} - \mathbf{v}_\alpha, \quad \mathbf{g}' = \mathbf{v'}_{1\beta} - \mathbf{v'}_\alpha. \tag{1.2.6}$$

В этих переменных

$$\begin{aligned} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha &= m_\alpha \mathbf{G} - \mu_{\alpha\beta}\mathbf{g}, \qquad & m_\alpha \mathbf{v'}_\alpha &= m_\alpha \mathbf{G} - \mu_{\alpha\beta}\mathbf{g}', \\ m_\beta \mathbf{v}_{1\beta} &= m_\beta \mathbf{G} + \mu_{\alpha\beta}\mathbf{g}, \qquad & m_\beta \mathbf{v'}_{1\beta} &= m_\beta \mathbf{G} + \mu_{\alpha\beta}\mathbf{g}'. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Здесь

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$$

— приведенная масса частиц, участвующих в столкновении.

Подстановка (1.2.7) в уравнение (1.2.4) с учетом определения $\mathbf{G}$ (1.2.5) приводит к условию

$$g = g', \tag{1.2.8}$$

т. е. в результате столкновения вектор относительной скорости $\mathbf{g}$ поворачивается и переходит в $\mathbf{g}'$, но модули этих векторов $g = |\mathbf{g}|$ остаются неизменными.

Изменение направления $\mathbf{g}'$ относительно $\mathbf{g}$ задается полярными и азимутальными углами χ и φ (рис. 1.1). При этом

$$\mathbf{g}' = g\mathbf{i}\cos\chi + g\mathbf{j}\sin\chi\cos\varphi + g\mathbf{k}\sin\chi\sin\varphi, \tag{1.2.9}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, причем вектор $\mathbf{g}$ направлен вдоль $\mathbf{i}$.

Из уравнений (1.2.5)–(1.2.7) следует, что обратные преобразования скоростей получаются простой перестановкой штрихованных и нештрихованных величин. Это свойство, а также линейность уравнений обеспечивают равенство якобианов прямого и обратного преобразований. Легко показать, что в этом случае оказываются справедливыми следующие соотношения [1]:

$$d\mathbf{v}_\alpha\, d\mathbf{v}_{1\beta} = d\mathbf{G}\, d\mathbf{g}, \quad d\mathbf{v'}_\alpha d\mathbf{v'}_{1\beta} = d\mathbf{G}\, d\mathbf{g}', \tag{1.2.10}$$

а также

$$d\mathbf{v}_\alpha\, d\mathbf{v}_{1\beta} = d\mathbf{v'}_\alpha\, d\mathbf{v'}_{1\beta}. \tag{1.2.11}$$

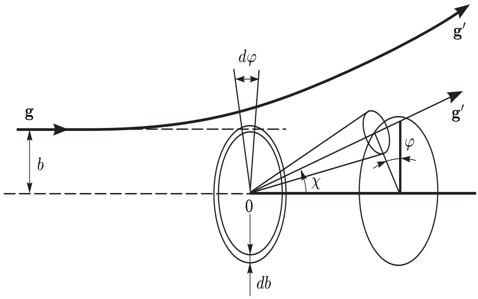


Рис. 1.1. Геометрия парного столкновения. Начало системы отсчета совмещено с положением первой частицы, которая считается покоящейся

Для дальнейшего обсуждения полезно ввести понятие дифференциального сечения рассеяния. Рассмотрим однородный пучок частиц, налетающих на силовой центр с начальной скоростью $\mathbf{g}$ и имеющих все возможные значения прицельного параметра b (рис. 1.1). Число частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega = \sin\chi\, d\chi\, d\varphi$ пропорционально плотности потока частиц в пучке I_0 и величине $d\Omega$. Тогда дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(g,\Omega)$ определяется таким образом, что $I_0\sigma\, d\Omega$ равно числу частиц, рассеиваемых за 1 с в элемент телесного угла $d\Omega$. Из рис. 1.1 видно, что такое же число частиц проходит через элемент кольца $b\, db\, d\varphi$, поэтому

$$I_0\sigma(g,\Omega)\; d\Omega = I_0 b\, db\, d\varphi,$$

откуда следует, что

$$\sigma(g,\chi,\varphi) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|, \tag{1.2.12}$$

где значение производной $db/d\chi$ берется по модулю, поскольку сечение рассеяния σ должно быть положительной величиной.

Заметим, что для частиц, рассматриваемых как точечные центры сил, из-за сферической симметрии потенциала взаимодействия частиц сечение рассеяния оказывается функцией только модуля относительной скорости частиц g и угла рассеяния χ (не зависит от φ).

Получим теперь явное выражение для интеграла столкновений $J_{\alpha\beta}$ частиц сортов α и β. Пусть $K^{+}_{\alpha\beta}\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}\, dt$ есть среднее число столкновений за промежуток времени dt, в результате которых конечное состояние одной частицы из пары сталкивающихся частиц попадает в элемент фазового объема $d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}$ вблизи точки $(\mathbf{v},\mathbf{r})$. В свою очередь,

$K^-_{\alpha\beta}\,d\mathbf{v}\,d\mathbf{r}\,dt$ есть среднее число столкновений за тот же промежуток времени, в которых начальное состояние одной из сталкивающихся частиц находится в том же элементе объема. Поскольку полное изменение числа частиц в элементе объема $d\mathbf{v}\,d\mathbf{r}$ за время dt, не связанное со столкновениями, равно $(Df_\alpha/Dt)\;d\mathbf{v}\,d\mathbf{r}\,dt$, при наличии столкновений мы должны приравнять его выражению $\sum\limits_\beta \left(K^+_{\alpha\beta} - K^-_{\alpha\beta}\right) d\mathbf{v}\,d\mathbf{r}\,dt$, откуда следует

$$J_{\alpha\beta} = K^+_{\alpha\beta} - K^-_{\alpha\beta}. \tag{1.2.13}$$

Далее при вычислении среднего числа столкновений будем предполагать, что корреляция между положением и скоростью двух сталкивающихся частиц отсутствует (гипотеза о молекулярном хаосе). Интервал времени dt считается при этом малым по сравнению с характерным временным масштабом изменения макроскопических величин, но достаточно большим по сравнению с длительностью столкновения.

Рассмотрим столкновение между частицей сорта β и частицей сорта α, центр которой совмещен с началом координат (рис. 1.1). Пусть прицельный параметр, соответствующий такому столкновению, лежит в интервале между b и $b + db$, а азимутальный угол — в интервале между φ и $\varphi + d\varphi$. Для того чтобы это столкновение осуществилось за промежуток времени dt, в начале этого промежутка t центр частицы сорта β, движущейся со скоростью $\mathbf{g}$, должен лежать внутри цилиндра с площадью основания $b\,db\,d\varphi$ и образующей, равной $g\,dt$. Полное среднее число частиц сорта β, имеющих скорости в интервале между $\mathbf{v}_{1\beta}$ и $\mathbf{v}_{1\beta} + d\mathbf{v}_{1\beta}$, которые находятся в «цилиндре столкновений», есть $f_{1\beta}\left(\mathbf{v}_{1\beta}, \mathbf{r}, t\right)\; g b\,db\,d\varphi\,d\mathbf{v}_{1\beta}\,dt$.

Предполагая положения и скорости частиц сортов α и β статистически независимыми, с каждым таким цилиндром можно связать каждую из частиц сорта α, среднее число которых в соответствующем интервале $d\mathbf{v}_\alpha$ и объеме $d\mathbf{r}$ есть $f_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t\right) d\mathbf{v}_\alpha\,d\mathbf{r}$. В результате полное среднее число столкновений между частицами сортов α и β за время dt в объеме $d\mathbf{r}$ определяется как

$$f_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t\right) f_{1\beta}\left(\mathbf{v}_{1\beta}, \mathbf{r}, t\right)\; g b\,db\,d\varphi\,d\mathbf{v}_\alpha\,d\mathbf{v}_{1\beta}\,d\mathbf{r}\,dt. \tag{1.2.14}$$

Это выражение может быть использовано для вычисления $K^-_{\alpha\beta}$, поскольку каждое столкновение частицы сорта α с частицами сорта β приводит к изменению ее скорости и означает, следовательно, потерю одной частицы, принадлежащей к данной совокупности. Полная скорость $K^-_{\alpha\beta}\,d\mathbf{v}_\alpha\,d\mathbf{r}\,dt$, соответствующая убыли числа частиц сорта α в результате их столкновений с частицами сорта β, получается в результате интегрирования выражения (1.2.14) по всем значениям скоростей $\mathbf{v}_{1\beta}$, прицельного параметра b и угла φ.

В результате $K_{\alpha\beta}^{-}=\iiint f_\alpha f_{1\beta} g b\, db\, d\varphi\, d\mathbf{v}_{1\beta}$, или с учетом (1.2.12),

$$K_{\alpha\beta}^{-}=\iint f_\alpha f_{1\beta} g \sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\; d\Omega\, d\mathbf{v}_{1\beta}, \tag{1.2.15}$$

где введены сокращения $f_\alpha = f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ и $f_{1\beta}=f_{1\beta}(\mathbf{v}_{1\beta}, \mathbf{r}, t)$.

Аналогичным образом можно вычислить $K_{\alpha\beta}^{+}$, рассматривая столкновения, в результате которых частицы, обладающие первоначально скоростями вне интервала $d\mathbf{v}_\alpha$, попадают в этот интервал. В результате

$$K_{\alpha\beta}^{+}=\iint f'_\alpha f'_{1\beta} g' \sigma'_{\alpha\beta}(g',\chi)\; d\Omega\, d\mathbf{v}_{1\beta}, \tag{1.2.16}$$

где $f'_\alpha = f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{r}, t)$ и $f'_{1\beta}=f_{1\beta}\left(\mathbf{v}'_{1\beta}, \mathbf{r}, t\right)$. Для приведения интеграла столкновений к окончательному виду используем соотношение взаимности для прямых и обратных столкновений, следующее из симметрии процесса упругого рассеяния [1]:

$$g\sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\; d\Omega\, d\mathbf{v}_\alpha\, d\mathbf{v}_{1\beta} = g'\sigma'_{\alpha\beta}(g',\chi)\, d\Omega\, d\mathbf{v}'_\alpha\, d\mathbf{v}'_{1\beta}. \tag{1.2.17}$$

Объединяя (1.2.15) и (1.2.16) с учетом (1.2.17) в выражении (1.2.13), получаем

$$J_{\alpha\beta}=\iint \left(f'_\alpha f'{}_{1\beta} - f_\alpha f_{1\beta}\right) g\sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\; d\Omega\, d\mathbf{v}_{1\beta}. \tag{1.2.18}$$

Кинетическое уравнение Больцмана записывается, таким образом, в следующем окончательном виде:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = \\ = \sum_\beta \iint \left(f'_\alpha f'_{1\beta} - f_\alpha f_{1\beta}\right) g\sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\; d\Omega\, d\mathbf{v}_{1\beta}. \tag{1.2.19}$$

При этом сила $\mathbf{F}_\alpha$, действующая на частицу сорта α, записывается в общем случае как

$$\mathbf{F}_\alpha = e_\alpha(\mathbf{E}+\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) + \mathbf{X}_\alpha, \tag{1.2.20}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поля, e_α — заряд частицы, $\mathbf{X}_\alpha$ — силы неэлектромагнитной природы, которые для простоты предполагаются не зависящими от $\mathbf{v}_\alpha$.

Обобщенное кинетическое уравнение больцмановского типа может быть записано и в случае, когда частицы газовой смеси (плазмы) обладают внутренними степенями свободы. Это уравнение называется кинетическим уравнением Ванг Чанга и Уленбека [3, 4]. Процедура его вывода мало чем отличается от приведенного выше, существенно лишь, что при столкновениях частиц происходит не только их переход из одного интервала скоростей в другой, но и изменение их внутренних состояний $i, j \to k, \ell$. При окончательной записи интеграла столкновений существенно используется соотношение симметрии между прямыми и обратными столкновениями [4]:

$$g\sigma_{\alpha\beta}\,(i, j\,|k, \ell,\ g, \chi)\ d\Omega\, d\mathbf{v}_\alpha\, d\mathbf{v}_{1\beta} =$$
$$= g'\sigma'_{\alpha\beta}\,(k, \ell\,|i, j,\ g', \chi)\ d\Omega\, d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_{1\beta}. \quad (1.2.21)$$

Здесь $\sigma_{\alpha\beta}\,(i, j\,|k, \ell,\ g, \chi)$ — сечение прямого столкновения, соответствующего переходу $\mathbf{g} \to \mathbf{g}'$ и $i, j \to k, \ell$, а $\sigma'_{\alpha\beta}\,(k, \ell\,|i, j,\ g', \chi)$ — сечение обратного столкновения, соответствующего переходу $\mathbf{g}' \to \mathbf{g}$ и $k, \ell \to i, j$. При этом из законов сохранения импульса и энергии для неупругого столкновения следует, что

$$g'^2 = g^2 - \frac{2}{\mu_{\alpha\beta}}\,\Delta E_{\alpha\beta}, \quad (1.2.22)$$

где

$$\Delta E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\,k} + E_{1\beta\,\ell} - E_{\alpha\,i} - E_{1\beta\,j}. \quad (1.2.23)$$

Связь между векторами $\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}'$ по-прежнему определяется соотношением (1.2.9) с заменой g на g' в правой части.

Заметим, что соотношение (1.2.21) выполняется, строго говоря, лишь для невырожденных состояний внутреннего движения частиц, т. е. может оказаться некорректным, например, для молекул с вращательными степенями свободы. В этом случае применяется более обоснованный квантовомеханический вывод кинетического уравнения, которое называется уравнением Вальдмана–Снайдера [5, 6]. Однако, как было показано Вальдманом [7], это уравнение фактически переходит в уравнение Ванг–Чанга и Уленбека, если сделать предположение об изотропной ориентации момента импульса молекулы в пространстве и осуществить суммирование по этим ориентациям. При этом необходимо лишь изменить нормировку функции распределения с учетом статистических весов соответствующих вращательных состояний молекул и ввести эффективное усредненное сечение рассеяния по вырожденным состояниям [5, 7].

В результате кинетическое уравнение для газовой смеси (плазмы) с внутренними степенями свободы частиц может быть представлено в виде

$$\frac{\partial f_{\alpha\,i}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_{\alpha\,i} + \frac{1}{m_\alpha}\mathbf{F}_\alpha\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha\,i} =$$
$$= \sum_\beta \sum_{jk\ell} \int\!\!\int \big(f'_{\alpha\,k} f'_{1\beta\,\ell} - f_{\alpha\,i} f_{1\beta\,j}\big) g\sigma_{\alpha\beta}\,(i, j\,|k, \ell,\ g, \chi)\, d\Omega d\mathbf{v}_{1\beta}. \quad (1.2.24)$$

1.3. Эффективные сечения рассеяния

Проблема определения дифференциальных сечений упругого и неупругого взаимодействия частиц представляет собой самостоятельную задачу, которая должна решаться в общем случае методами квантовой механики. На самом деле при конкретных расчетах кинетических коэффициентов (коэффициентов переноса) нас будут интересовать эффективные сечения, проинтегрированные по углам рассеяния. К их числу относится, например, транспортное сечение $Q^{(1)}_{\alpha\beta}(g)$, которое иногда называют диффузионным сечением или «сечением с передачей импульса»:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}(g) = \int\limits_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\,(1-\cos\chi)\,d\Omega = \\ = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\,(1-\cos\chi)\sin\chi d\chi. \quad (1.3.1)$$

В общем случае в получаемых ниже выражениях будут встречаться транспортные сечения произвольного ℓ-го порядка (ℓ — целое положительное число):

$$Q^{(\ell)}_{\alpha\beta}(g)\,\mathrm{g} = \int\limits_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\left(1-\cos^{\ell}\chi\right)\,d\Omega = \\ = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\left(1-\cos^{\ell}\chi\right)\sin\chi\,d\chi. \quad (1.3.2)$$

Для классического упругого столкновения частиц зависимость угла рассеяния χ от прицельного параметра b для произвольных значений g, а следовательно и зависимость $\sigma(g,\chi)$, можно найти, как известно, в рамках классического рассмотрения задачи рассеяния частицы приведенной массы $\mu_{\alpha\beta}$ в поле неподвижного силового центра с известным потенциалом $U_{\alpha\beta}(r)$ [8]. При этом

$$\chi = |\,\pi - 2\theta_0|, \quad (1.3.3)$$

где θ_0 — угол, соответствующий точке наибольшего сближения частиц r_0 и определяемый выражением

$$\theta_0 = b\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2}\left[1-\frac{b^2}{r^2}-\frac{2U(r)}{\mu\,g^2}\right]^{-1/2}. \quad (1.3.4)$$

Величина r_0 находится из условия

$$r_0^2 - b^2 - r_0^2\,\frac{2U\left(r_0\right)}{\mu\, g^2} = 0. \tag{1.3.5}$$

Дифференциальное сечение $\sigma\left(g,\chi\right)$ можно найти тогда при заданном $U\left(r\right)$ по вычисленной зависимости $\chi\left(b\right)$ с помощью соотношения (1.2.12).

В случае простейшего примера взаимодействия частиц — столкновения двух твердых упругих сфер с диаметрами d_α и d_β — решением, следующим из выражений (1.3.3)–(1.3.5), оказывается соотношение [9]:

$$\cos\frac{\chi}{2} = \frac{b}{d_{\alpha\beta}}, \quad b \leqslant d_{\alpha\beta}, \tag{1.3.6}$$

которое может быть получено, вообще говоря, и с помощью элементарных геометрических соображений. Здесь $d_{\alpha\beta} = \left(d_\alpha + d_\beta\right)/2$.

При этом $\sigma_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{4}\,d_{\alpha\beta}^2$, $Q_{\alpha\beta}^{(1)} = \pi d_{\alpha\beta}^2$,

$$Q_{\alpha\beta}^{(\ell)} = \pi d_{\alpha\beta}^2\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{1+\left(-1\right)^\ell}{1+\ell}\right]. \tag{1.3.7}$$

В качестве модельного потенциала для упругого взаимодействия частиц, полезного при практических оценках, нередко используется обратно-степенной закон взаимодействия

$$U_{\alpha\beta}\left(r\right) = \left(\frac{\varkappa_{\alpha\beta}}{r}\right)^\nu, \tag{1.3.8}$$

где ν называется показателем отталкивания (при $\nu \to \infty$ эта модель превращается в модель твердой сферы). В этом случае выражение для эффективного сечения $Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}\left(g\right)$ принимает вид [9]

$$Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}\left(g\right) = 2\pi\varkappa_{\alpha\beta}^2\left(\frac{\mu_{\alpha\beta}g^2}{2\nu}\right)^{-2/\nu}\int\limits_0^\infty\left[1 - \cos^\ell\chi(z,\nu)\right]z\,dz.$$

Величина $\chi\left(z,\nu\right)$ определяется из соотношения

$$\chi = \pi - 2\int\limits_0^{y_0}\left[1 - y^2 - \nu^{-1}\left(\frac{y}{z}\right)^\nu\right]^{-1/2}dy,$$

а y_0 удовлетворяет уравнению $1 - y_0^2 - \nu^{-1}\left(\dfrac{y_0}{z}\right)^\nu = 0$.

В результате

$$Q_{\alpha\beta}^{(\ell)}\left(g\right) = 2\pi\varkappa_{\alpha\beta}^2\left(\frac{\mu_{\alpha\beta}g^2}{2\nu}\right)^{-2/\nu}A_\ell\left(\nu\right), \tag{1.3.9}$$

где $A_\ell(\nu)$ — интеграл, значение которого зависит только от ν [9].

Некоторые значения $A_\ell(\nu)$ для $\ell = 1, 2$ приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Значения $A_\ell(\nu)$ для обратно-степенного закона отталкивания

ν	$A_1(\nu)$	$A_2(\nu)$
4	0,298	0,308
6	0,306	0,283
8	0,321	0,279
10	0,333	0,278
12	0,346	0,279
14	0,356	0,280
20	–	0,286
24	–	0,289
∞	0,500	0,333

Отметим, что из выражения (1.3.9) следует, что $Q^{(\ell)}_{\alpha\beta}(g) \sim g^{-4/\nu}$. Такой характер зависимости сохраняет свой вид и для потенциалов, описывающих притяжение между частицами.

Один из видов взаимодействия между заряженными частицами (электронами, ионами) и нейтральными атомами (молекулами) соответствует так называемому поляризационному взаимодействию. Оно связано с появлением у атомов электрического дипольного момента под влиянием кулоновского поля пролетающей заряженной частицы. Потенциальная энергия взаимодействия индуцированного дипольного момента атома с электроном равна

$$U(r) = \frac{\alpha_d e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^4}, \tag{1.3.10}$$

где α_d — поляризуемость атома. Это соответствует случаю $gQ^{(1)}_{\alpha\beta} = \mathrm{const}$. Такая зависимость $Q^{(1)}_{\alpha\beta}(g)$ согласуется с экспериментальными значениями упругого сечения рассеяния электронов при больших энергиях для ряда атомов и молекул (H, He, H_2) [10, 11]. Для легких атомов при низких энергиях оказывается существенным эффект обменного взаимодействия между электронами, который может быть рассчитан только методами квантовой механики. Ряд особенностей в поведении сечений возникает при рассеянии электронов на атомах тяжелых инертных газов. Это проявляется в резком уменьшении сечения рассеяния при малых энергиях электронов и наличии глубокого минимума (эффект Рамзауэра) с последующим возрастанием сечения