ЭКОНОМЕТРИКА

учебник

Под общей редакцией профессора В. Б. Уткина

$$t_{b_0} = b_0^* \frac{\sqrt{N-2}}{\sigma_e^*},$$

$$P_j^* = \frac{n_j}{n}$$

$$\gamma = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Phi_1^{-1}(\alpha) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} y_\alpha,$$

$$m_{y_i}^* = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}.$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \eta(x_i)]^2$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$D[P^*] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum D[X_i] = \frac{P(1-P)}{n}$$

УДК 330.43(075.8)
ББК 65в6я73
Э40

Авторы:
К. В. Балдин — д. э. н., профессор (глава 11, приложения 2, 3);
В. Н. Башлыков — к. т. н., доцент (главы 1–6, 8, 10, приложение 1);
Н. А. Брызгалов — к. т. н., доцент (введение, глава 7);
В. В. Мартынов — к. т. н., доцент (главы 1–6, 8, 10);
В. Б. Уткин — к. т. н., профессор (введение, глава 7, 11).
Глава 9 написана совместно всеми авторами.
Рецензенты:
В. А. Зотов — доктор физико-математических наук, профессор;
В. И. Бусов — доктор экономических наук, профессор.

Э40 **Эконометрика**: Учебник / Под ред. проф. В. Б. Уткина. — 2-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. — 564 с.

ISBN 978-5-394-02145-9

Учебник содержит систематизированное изложение методологических основ эконометрики. В нем представлены важнейшие сведения по теории вероятностей и математической статистике. В части “Методы эконометрики” содержится изложение методологии моделирования сложных экономических систем; методов дисперсионного, регрессионного и корреляционного анализа и основ применения метода экспертного оценивания.

Для студентов экономических вузов.

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.007399.06.09 от 26.06.2009 г.

Подписано в печать 20.06.2016. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ. л. 35,25.
Тираж 100 экз.

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.
Тел./факс: (499) 182-01-58, 182-11-79, 183-93-01
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
http://www.dashkov.ru

Отпечатано в ГУП Академиздатцентр «Наука» РАН,
ОП Производственно-издательский комбинат «ВИНИТИ»-«Наука»,
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.
Тел./факс: 554-21-86, 554-25-97, 974-69-76.

ISBN 978-5-394-02145-9

СОДЕРЖАНИЕ

Часть II
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ВВЕДЕНИЕ

В 30-х гг. XX в. сформировалось новое направление в экономической науке, возникшее в результате взаимодействия и взаимообусловленности трех групп методов: экономических, статистических и математических. Именно междисциплинарный подход к изучению экономических явлений привел к созданию такой научной и учебной дисциплины, как эконометрика.

Под эконометрикой понимают совокупность экономических и математико-статистических методов, дающих возможность выявлять закономерности и связи в экономических процессах и явлениях.

Дальнейшему развитию эконометрики способствовало стремительное развитие вычислительной техники с высокими технологическими характеристиками, что позволило сделать доступными для массового пользователя такие статистические методы, как многофакторный дисперсионный, регрессионный и корреляционный анализ, проверку непараметрических гипотез, анализ временных рядов для решения исследовательских и практических задач, составляющих предмет эконометрики.

По современным представлениям фундамент экономического образования составляют макро- и микроэкономика и эконометрика, тогда как остальные дисциплины Государственного образовательного стандарта играют роль надстройки. В свою очередь, статистические и математические методы, используемые в экономических исследованиях, составляют ядро эконометрики.

Учебник написан на основе методологии системного анализа и структурно состоит из введения, трех частей и приложений.

В первой части содержатся основные сведения из теории вероятностей (3 главы: случайные события, случайные величины, функции случайных аргументов).

Вторая часть (4 главы) посвящена вопросам математической статистики: общей характеристике статистических методов; основам статистической обработки результатов испытаний, прежде всего – точечному и интервальному оцениванию числовых характеристик случайных величин; методам статистической проверки параметрических и непараметрических гипотез.

В третьей части (5 глав) изложены методы эконометрики. Глава 7 содержит методологию моделирования сложных экономических систем. Особо выделены метод имитационного моделирования и технология моделирования случайных факторов различных типов (случайных событий; величин; векторов). В главах 8, 9, 10 представлены особенности применения методов одно- и многофакторного дисперсионного, регрессионного (в том числе с использованием нелинейных моделей) и корреляционного анализа, соответственно. Глава 11 содержит сведения об использовании метода экспертного оценивания при анализе результатов статистического исследования.

В приложениях приведены статистические таблицы, необходимые для практической реализации изложенных методов.

Эффективная работа с учебником возможна при наличии у читателя прочных знаний в объеме программ вузов по высшей математике, экономической теории и основам математического моделирования систем.

Материалы настоящего учебника подготовлены авторами на основе отечественных и зарубежных источников с расширением прикладных аспектов за счет собственных научно-практических разработок. Авторы весьма признательны рецензентам книги и всем, кто знакомился с ее содержанием на этапах подготовки рукописи к печати, за ценные замечания и предложения, которые были с благодарностью приняты.

Часть I
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей — математическая наука, занимающаяся изучением закономерностей в случайных явлениях массового характера.

Под случайным принято понимать явление, которое при многократном наблюдении (воспроизведении одного и того же комплекса условий проведения эксперимента) протекает каждый раз по-разному.

Например, в 1827 г. ботаник Р. Броун открыл явление, которое впоследствии было названо броуновским движением. Наблюдая под микроскопом частицы пыльцы, он заметил, что они находятся в непрерывном беспорядочном движении, которое не удается прекратить. Вскоре было обнаружено, что это движение — общее свойство любых мелких частиц, взвешенных в жидкости. Интенсивность движения зависит только от температуры и вязкости жидкости и от размеров частиц. Каждая частица движется по своей собственной траектории, не похожей на траектории других частиц, так что близкие частицы очень быстро становятся удаленными.

Приведем другой пример. Производится стрельба из артиллерийского орудия. С помощью методов баллистики при определенных исходных данных (начальной скорости движения снаряда $\overline{V}_0$, угле бросания Θ_0, баллистическом коэффициенте снаряда C) можно рассчитать теоретическую траекторию движения (штрихпунктирная линия на рис. 1.1).

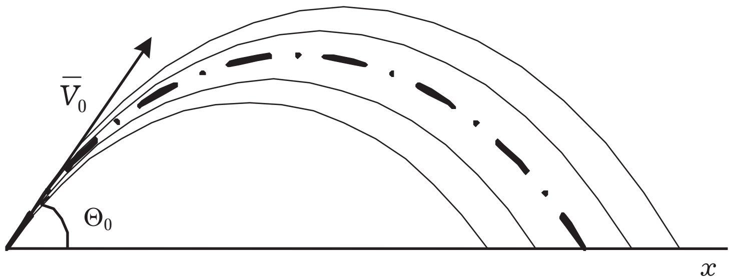

Рис. 1.1

При реальных стрельбах траектория полета каждого отдельного снаряда будет отклоняться от расчетной. При проведении нескольких выстрелов при одних и тех же исходных данных (V_0, Θ_0, C) будем наблюдать рассеивание траектории полета снарядов относительно расчетной. Это обусловлено действием большого числа второстепенных факторов, влияющих на траекторию полета, но не заданных в числе исходных данных. К таким факторам следует отнести: ошибки при изготовлении снаряда, отклонение веса снаряда от номинального значения, неоднозначность структуры заряда, ошибки в установке угла наклона ствола орудия, метеорологические условия и т. д.

Основные факторы, учитываемые при наблюдении случайного явления, определяют его протекание в общих чертах, и от наблюдения (опыта) к наблюдению не меняются. Второстепенные факторы вызывают различия в их результатах.

Вполне очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором точно и полно учтены факторы, определяющие явление. Невозможно достигнуть того, чтобы при многократных наблюдениях результаты полностью и в точности совпадали.

Иногда при решении практических задач случайными отклонениями пренебрегают, рассматривая не само реальное явление, а его упрощенную схему (модель), полагая, что в данных условиях наблюдения явление протекает вполне определенным образом.

При этом из всей совокупности факторов, влияющих на явление, выделяются основные, наиболее существенные. Влиянием остальных, второстепенных, факторов просто пренебрегают.

Данная схема изучения явлений часто применяется в механике, технике, психологии, экономике и других отраслях знаний. При таком подходе к изучению явлений выявляется основная закономерность, присущая данному явлению и дающая возможность предсказать результат наблюдения при определенных исходных данных. По мере развития науки число учитываемых факторов увеличивается, явление исследуется подробнее, научный прогноз становится точнее. Описанная схема изучения явлений получила название классической схемы, так называемых точных наук.

Однако при решении многих практических задач классическая схема “точных наук” неприменима. Существуют задачи, результат решения которых зависит от достаточно большого числа факторов, зарегистрировать и учесть которые практически невозможно.

Например, производится обстрел объекта из артиллерийского орудия с целью его поражения. Как было отмечено выше, при стрельбе из артиллерийского орудия имеет место рассеивание точек падения снарядов. Если размеры объекта существенно превышают размеры зоны рассеивания, то этим рассеиванием можно пренебречь, поскольку выпущенный снаряд попадет в цель. Если размер объекта меньше размеров зоны рассеивания, то некоторая часть снарядов в цель не попадет. В этих условиях приходится решать задачи, например, по определению среднего числа снарядов, попавших в цель, требуемого числа снарядов для надежного поражения цели и др. При решении таких задач классическая схема “точных наук” оказывается недостаточной. Эти задачи связаны со случайной природой рассеивания снарядов, и при их решении случайностью этого явления пренебрегать нельзя. Необходимо изучить рассеивание снарядов как случайное явление с точки зрения присущих ему закономерностей. Надо исследовать закон распределения координат точек падения снарядов, выяснить источники, вызывающие рассеивание, и т. д.

Рассмотрим еще пример. Система автоматического управления функционирует в условиях непрерывно воздействующих помех. Действие помех приводит к отклонению управляемых параметров от расчетных значений. При исследовании процесса функционирования системы необходимо установить природу и структуру случайных возмущений, выяснить влияние конструктивных параметров системы на вид этой реакции и т. п.

Все подобные задачи, а число их в природе чрезвычайно велико, требуют изучения не только основных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и анализа случайных возмущений и исключений, связанных с наличием второстепенных факторов и придающих результату наблюдений при заданных исходных данных элемент неопределенности.

С теоретической точки зрения второстепенные (случайные) факторы ничем не отличаются от основных (наиболее существенных). Точность решения задачи можно повышать за счет учета большого числа факторов, от самых существенных до самых ничтожных. Однако это может привести к тому, что решение поставленной задачи ввиду сложности и громоздкости будет практически неосуществимым и не будет представлять никакой ценности.

Очевидно, должна существовать принципиальная разница в методах учета основных факторов, определяющих явление в главных чертах, и второстепенных факторов, влияющих на явление в качестве возмущений. Элементы неопределенности, сложности, присущие случайным явлениям, требуют создания специальных методов для изучения этих явлений.

Такие методы и разрабатываются в теории вероятностей. Ее предметом являются специфические закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях. При многократных наблюдениях однородных случайных явлений обнаруживаются в них вполне определенные закономерности, своего рода устойчивости, свойственные именно массовым случайным явлениям.

Например, если много раз подряд бросать монету, то частота появления цифры (отношение числа бросаний, при которых появилась цифра, к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется, приближаясь к числу, равному 0,5. Такое же свойство "устойчивости частоты" обнаруживается и при многократном повторении любого другого опыта, исход которого представляется заранее неопределенным (случайным).

Закономерности в случайных явлениях появляются всегда, когда имеют дело с массой однородных случайных явлений. Они оказываются практически независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются, а средний результат массы случайных явлений оказывается практически уже неслучайным.

Методы теории вероятностей приспособлены только для исследования массовых случайных явлений. Они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но позволяют предсказать средний случайный результат массы однородных случайных явлений, предсказать средний исход массы аналогичных опытов, конкретный исход каждого из которых остается неопределенным (случайным).

Вероятностные методы не противопоставляют себя классическим методам "точных наук", а являются их дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учетом присущих ему элементов случайности.

В зависимости от сложности случайного явления для его описания используют следующие понятия: *случайное событие, случайная величина, случайная функция* (рис. 1.2).

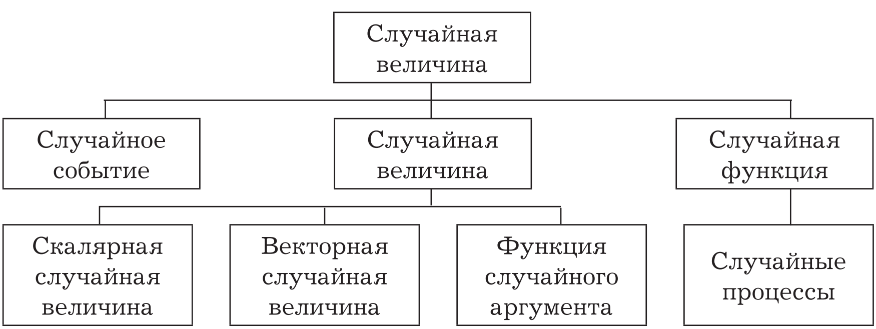

Рис. 1.2

Именно в такой последовательности и будем рассматривать закономерности в случайных явлениях.

1.2. Основные понятия и определения

Одним из фундаментальных понятий в теории вероятностей является испытание (эксперимент). Под испытанием понимают наблюдение того или иного явления при реализации определенного комплекса условий (наблюдение этого же явления в других условиях считается другим испытанием).

Если результат испытания фиксируется только как факт, то его называют событием.

Введем следующую формальную схему испытания (эксперимента) (рис. 1.3).

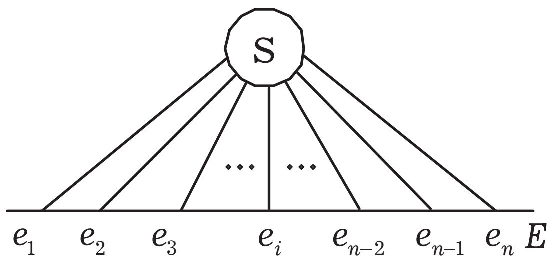

Рис. 1.3

S — комплекс условий эксперимента;

E — множество результатов эксперимента.

В одной реализации эксперимента может появиться один, и только один исход, который называют *элементарным событием* e_i. Множество всех исходов эксперимента E называют *пространством элементарных событий*. Оно вводится описательным путем.

Пример 1.1. Производится прием готовой продукции на предприятии. Элементарными событиями будут e_1 — исправное изделие не принято, e_2 — принятое изделие исправно, e_3 — принято исправным дефектное изделие. Множество исходов: e_1, e_2, e_3 образует пространство элементарных событий $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Группируя различным образом элементарные события, также будем получать события. Событие A — это подмножество пространства элементарных событий $A \subset E$.

В дальнейшем события будем обозначать прописными буквами начала латинского алфавита: A, B, C и т. д. или такими же буквами с цифровыми индексами.

Например, событие A — изделие принято (пример 1.2.) включает элементарные события e_2 — принятое изделие исправно и e_3 — принято исправным дефектное изделие:

$$A = \{e_2, e_3\}.$$

Пример 1.2. Производится обстрел m целей. Элементарные события: e_1 — ни одна цель не поражена ($e_1 = 0$); поражена одна цель ($e_2 = 1$); поражено две цели ($e_3 = 1$) и т. д. до $e_{m+1} = m$. В этом случае получаем пространство элементарных событий

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}\}.$$

Событие В — поражение не менее двух целей (пример 1.2.) включает элементарные события e_3, e_4 ..., e_{m+1}

$$E = \{e_3, e_4, \ldots, e_{m+1}\}.$$

Все множество событий, которое можно построить на пространстве элементарных событий, называют полем событий или σ — (сигма) — алгеброй.

Событие, которое наступает всякий раз при реализации комплекса условий, называют *достоверным*. Например, падение на землю монеты или кости при их подбрасывании и т. д.

Событие, которое никогда не наступает при реализации данного комплекса условий, называют *невозможным*. Например, процедура банкротства более m предприятий при диагностике m предприятий является событием невозможным.

В дальнейшем будем обозначать достоверные события буквой U, а невозможные — буквой V.

Событие, которое при реализации данного комплекса условий может как наступить, так и не наступить, называют *случайным*. Например, попадание в цель при одном выстреле, прием партии готовой продукции при контроле ее качества, отказ элемента системы в процессе ее функционирования в течение времени t и т. п.

Между различными событиями, принадлежащими одному и тому же пространству элементарных событий, могут быть установлены определенные соотношения и операции. Обычно для изображения событий используют логические диаграммы Эйлера-Венна (Венна).

Рассмотрим некоторые операции над событиями.

Произведением (пересечением) нескольких событий A_1, A_2,..., A_n называют событие

$$B = \prod_{i=1}^{n} A_i,$$

состоящее в совместном (одновременном или последовательном) их наступлении. Событие B включает те, и только те элементарные события, которые принадлежат одновременно и A_1, и A_2, и ..., и A_n. Диаграмма Венна для события $B = A_1 \cdot A_2$ показана на рис. 1.4 (заштрихованная область).

Например, событие, заключающееся в нормальном функционировании технической системы, состоящей из двух последовательно соединенных элементов (рис. 1.5), является произведением двух событий: A_1 — исправная работа первого элемента и A_2 — исправная работа второго элемента, причем оба эти события при испытании осуществляются одновременно. Примером произведения событий, наступающих при испытании последовательно, является поражение трех целей при их обстреле из орудия тремя снарядами.

Суммой (объединением) событий A_1, A_2,..., A_n называют событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из них и обозначаемое

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Событие C включает в себя все те элементарные события, которые принадлежат хотя бы одному из событий A_i.

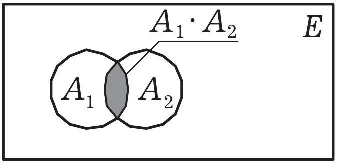

Рис. 1.4

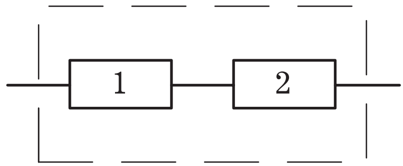

Рис. 1.5

В рассмотренном выше примере (см. рис. 1.5), событие C является суммой событий A_1 или A_2, если C — отказ цепи, а A_1 и A_2 — отказ первого и второго элемента соответственно. Диаграмма Венна представлена на рис. 1.6 (заштрихованная область).

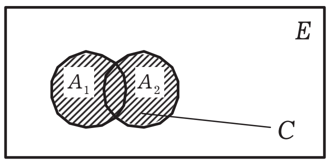

Рис. 1.6

События A_1 и A_2 называются *несовместными* в данном испытании, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. Например, при стрельбе по цели из орудия двумя снарядами события A_1 — получение одного попадания в цель и A_2 — получение двух попаданий (в той же серии выстрелов) являются несовместными. Символически признак несовместности событий A_1 и A_2 можно представить так:

$$A_1 \cdot A_2 = V.$$

У несовместных событий нет общих точек на диаграмме. Несколько событий называются *попарно несовместными*, если никакие два из них в данном испытании не могут наступить вместе. Например, при стрельбе по цели из орудия двумя снарядами события A_0 — ни одного попадания в цель, A_1 — одно попадание в цель, A_2 — два попадания в цель попарно несовместны. Обычно попарно несовместные события называют просто *несовместными*.

Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ составляют *полную группу*, если в результате испытания обязательно наступает хотя бы одно из них, т. е., если

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U. \tag{1.1}$$

Так, в рассматриваемом выше примере стрельбы по цели двумя снарядами события A_0, A_1, A_2 составляют полную группу несовместных событий. Диаграмма Венна для данного случая показана на рис. 1.7.

Два несовместных события, составляющих полную группу, называются *противоположными* (рис. 1.8).

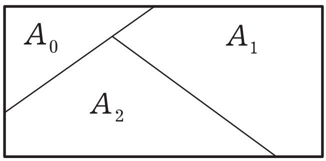

Рис. 1.7

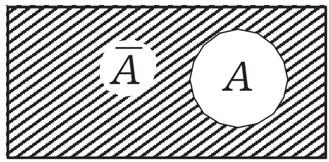

Рис. 1.8

Их обычно обозначают A и $\overline{A}$ (не “А”). Например, отказ и нормальное функционирование элемента технической системы, попадание и промах при стрельбе одним снарядом по цели являются противоположными событиями.

Для противоположных событий справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A + \overline{A} &= U, \\ A \cdot \overline{A} &= V. \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.3. Частота и вероятность. Способы нахождения вероятностей случайных событий

При обработке результатов испытаний принято считать наиболее информативной характеристикой того, как часто наступало некоторое событие A в серии испытаний, произведенных при одном и том же комплексе условий, отношение числа $N(A)$ испытаний, в которых оно имело место, к общему их числу:

$$P^*(A) = \frac{N(A)}{N}. \qquad (1.3)$$

Эту величину $P^*(A)$ принято называть *частотой* наступления события (иногда ее называют частостью). Вполне очевидно, что для невозможного события

$$P^*(V) = 0,$$

для достоверного

$$P^*(U) = 1,$$

а для случайного

$$0 \leq P^*(A) \leq 1.$$

Знаки нестрогого неравенства здесь поставлены потому, что случайное событие, в принципе, может наступить или не наступить во всех произведенных испытаниях.

При многократном осуществлении какого-либо одного и того же испытания частота наступления соответствующего ему события сравнительно редко сколько-нибудь значительно отклоняется от некоторого неотрицательного числа, причем тем реже, чем больше произведено испытаний. Такое свойство частоты называют *устойчивостью*. Это свойство, многократно проверенное экспериментально, является одной из наиболее характерных закономерностей, которые присущи случайным явлениям.

Число, относительно которого при неограниченном увеличении количества испытаний стабилизируется частота наступления события в определенных условиях, принимают за меру объективной возможности его появления в этих условиях и называют *вероятностью* данного события.

Обозначать вероятности принято буквами p или P с указанием или без указания в скобках соответствующего события.

Из введенного выше понятия вероятности следует, что

$$0 \leq P \leq 1,$$

причем для достоверного события

$$P(U) = 1,$$

а для невозможного

$$P(V) = 0.$$

Вероятность случайного события позволяет судить о том, как часто оно будет иметь место при проведении данного эксперимента. Например, если вероятность нормального функционирования системы за промежуток времени T равна 0,94, то при достаточно большом числе испытаний системы в соответствующих условиях она не откажет в среднем в 94 испытаниях из каждых 100.

Особенность устойчивости частоты состоит в том, что при увеличении числа испытаний она не стремится к вероятности как к пределу, а стабилизируется относительно этой характеристики так, что существенные отклонения частоты от вероятности оказываются все более и более редкими. Тем не менее это дает основание принимать за вероятность события частоту его наступления, полученную по результатам большого числа испытаний. Однако следует иметь в виду, что практическое применение такого способа нахождения вероятностей может быть существенно ограничено стоимостью соответствующих экспериментов. Кроме того, обычно проблематичным является решение вопроса о том, какое число испытаний можно считать достаточным для нахождения вероятности интересующего события без большого риска допустить существенную ошибку в оценке ее величины.

Например, еще в XVIII в. было замечено, что среди обычной корреспонденции письма без адреса обладают определенной устойчивостью. Замечено, что на протяжении нескольких лет на каждый миллион писем приходилось в среднем 25–27 писем без адреса.

Частотный подход к определению вероятности, несмотря на его кажущуюся простоту, приводил к теоретическим и математическим трудностям. Поэтому в современной теории вероятностей понятие вероятности события обычно вводят аксиоматически.

1.3.1. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Рассмотрим формулировки аксиом, данные академиком А. Н. Колмогоровым.

1. Каждому случайному событию $A \subset E$ поставлено в соответствие число $P(A)$, $0 \le P(A) \le 1$, которое называют вероятностью наступления события A.

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(U) = 1.$$

3. Если события $A_1, A_2,..., A_i, A_n$ попарно несовместные, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Из аксиом следуют свойства вероятности, которые приведем без доказательства.

1. Вероятность невозможного события равна нулю

$$P(V) = 0.$$

2. Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A, равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3. Если событие A влечет за собой событие B ($A \subset B$), то

$$P(A) \le P(B).$$

4. Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей

$$0 \le P(A) \le 1.$$

5. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Таким образом вводится одно из правил действия с вероятностями — правило сложения вероятностей.

Другое правило — правило умножения вероятностей — опирается на понятие условной вероятности. *Условной вероятностью $P(A/B)$ называют вероятность события A, вычисленную при условии, что событие B произошло.*

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

или

$$P(AB) = P(B)P(A/B).$$

1.3.2. Классический способ определения вероятности

В теории вероятностей широкое распространение получили задачи, условия которых соответствуют так называемой схеме урн. Сущность этой схемы может быть сформулирована следующим образом. Результаты эксперимента представляются конечным числом *равновозможных и несовместных* исходов, составляющих *полную группу*, причем некоторые исходы благоприятствуют наступлению какого-либо события, т. е. при осуществлении любого из них данное событие имеет место. (Понятие равновозможности исходов эксперимента в классической теории вероятностей является основным, однако формально не определяется).

Такая схема реализуется наиболее просто, если эксперимент заключается в том, что из “урны” (непрозрачного сосуда), содержащего некоторое известное количество одинаковых на ощупь шаров разного цвета, извлекается наудачу некоторое число шаров, а интересующим экспериментатора событием является выход определенной комбинации шаров каждого цвета. Этим и объясняется принятое название данной схемы.

Классический способ определения вероятности представляется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.4}$$

где m — число исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A;

n — общее число равновозможных несовместных исходов.

В “урне” находятся K одинаковых на ощупь шаров, в том числе M белых и $(K - M)$ черных. Испытание заключается в извлечении из нее наудачу N каких-либо шаров. Интересующее нас событие состоит в том, что среди выбранных шаров ровно m окажутся белыми.

Очевидно, что общее число всех равновозможных и несовместных исходов рассматриваемого испытания равно C_K^N. Событие, вероятность которого надо определить, будет иметь место, если в выборку попадут любые m белых шаров и любые $(N - m)$ черных. Количество вариантов выбора m белых шаров из общего их числа M равно C_M^m. Каждый такой вариант может осуществиться с каким-либо из C_{K-M}^{N-m} вариантов выбора $(N - m)$ черных шаров из $(K - M)$, имеющихся в "урне". Следовательно, число исходов, благоприятствующих наступлению интересующего нас события, равно произведению $C_M^m C_{K-M}^{N-m}$. Таким образом, согласно формуле (1.4), искомая вероятность определяется выражением:

$$P = \frac{C_M^m C_{K-M}^{N-m}}{C_K^N}.$$

Общим недостатком классического способа определения вероятности является его ограниченная применимость. Действительно, далеко не все комплексы условий приводят к возможности применения рассмотренных способов.

Поэтому в теории вероятностей разработаны способы, позволяющие определить вероятности одних событий через известные вероятности других. Основу этих способов составляют правила умножения и сложения вероятностей, опирающиеся на понятие условной вероятности.

1.4. Понятие условной вероятности. Стохастическая зависимость случайных событий

Пусть производится испытание со случайным исходом, в результате которого могут произойти (или не произойти) какие-то события A и B или несколько событий.

Вероятность события при условии наступления в данном испытании другого события (нескольких событий) называют условной и обозначают $P(A/B)$, $P(A/B_1, B_2, \ldots, B_n)$ и т. д.

Проиллюстрируем введенное понятие на примере. Осуществляется однократное бросание игральной кости и рассматриваются события: A — выпадение шести очков, B — выпадение четного числа очков. Применение классического способа определения вероятности в данном случае даст $P(A)=\frac{1}{6}$. Если в комплекс условий такого испытания ввести факт наступления события B, то соответствующая условная вероятность $P(A/B)$ оказывается равной $\frac{1}{3}$ (число всех равновозможных несовместных исходов испытания с выпадением четного числа очков — три, а выпадение шести очков происходит только в одном из них). Если же в комплекс условий испытания ввести факт наступления события $\overline{B}$, то условная вероятность $P(A/\overline{B})$ оказывается равной нулю, поскольку появление шести очков при выпадении нечетного их числа невозможно (события A и $\overline{B}$ несовместны). Таким образом, для рассмотренного испытания

$$P(A/B) \neq P(A/\overline{B}), \tag{1.5}$$

причем

$$\begin{gathered} P(A/B) \neq P(A), \\ P(A/\overline{B}) \neq P(A). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Из приведенного примера видно, что между событиями может существовать особого типа зависимость, которая проявляется в том, что вероятность одного из них изменяется при наступлении или ненаступлении другого (других). Такую зависимость называют стохастической (вероятностной).

Два события A и B являются *стохастически зависимыми*, если факт наступления или ненаступления одного из них изменяет вероятность наступления другого так, что выполняется условие (1.6). В противном случае, когда одно из событий не “реагирует” на появление или не появление другого изменением своей вероятности, т. е. имеют место равенства

$$P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A), \tag{1.7}$$

они являются *стохастически независимыми*. (В дальнейшем для краткости первое слово термина “стохастическая зависимость” будем опускать).

Зависимость (так же, как и независимость) событий всегда взаимна, т. е., если событие A зависит от B, то и B зависит от A. Более того, в этом случае зависимыми оказываются события A и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Несовместные события всегда зависимы. В самом деле, если события A и B несовместны, то при любом значении вероятности $P(A)$ условная вероятность $P(A/B)$ равна нулю и, следовательно, $P(A/B) \neq P(A)$.

Несколько событий называются попарно независимыми, если независимыми являются любые два из них.

Несколько событий независимы в совокупности, если вероятность наступления каждого из них не изменяется при появлении любой комбинации остальных. Следует иметь в виду, что для независимости событий в совокупности их попарной независимости недостаточно.

1.5. Правила действий с вероятностями

Область практического применения классического способа определения вероятности ограничена задачами, условия которых сводятся к “схеме урн”. Ограничена на практике и область статистического способа определения вероятностей событий по их частотам. Поэтому при решении практических задач широко используются методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий находить вероятности других, связанных с ними. Систему таких методов и представляет собой, в сущности, сама теория вероятностей. Ее основу составляет совокупность правил действия с вероятностями, а именно — правил (теорем) умножения и сложения вероятностей.

Правила умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, т. е.

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_1/A_2) = P(A_2)P(A_1/A_2). \quad (1.8)$$

При независимости событий A_1 и A_2

$$P(A_2/A_1) = P(A_2),\ P(A_1/A_2) = P(A_1),$$

поэтому

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2). \quad (1.9)$$

Вероятность произведения нескольких событий определяется соотношением

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2)\ldots \\ \ldots P(A_n / A_1A_2\ldots A_{n-1}), \quad (1.10)$$

а если эти события независимы в совокупности, то

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \quad (1.11)$$

Правила сложения вероятностей

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т. е.:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2). \quad (1.12)$$

Вероятность суммы нескольких событий в общем случае определяется соотношением

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \\ + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\ldots A_n). \quad (1.13)$$

Если же события несовместны, то

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad (1.14)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу, равна единице. Действительно в этом случае согласно соотношению (1.1)

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(U),$$

но $P(U) = 1$, а

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \qquad (1.16)$$

Принимая во внимание, что противоположные события по определению являются несовместными и составляют полную группу, из соотношения (1.16) получим также

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad (1.17)$$

или

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (1.18)$$

Пример 1.3. По цели производится три независимых выстрела. Вероятности попадания в цель при каждом очередном выстреле равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3.

Найти вероятности трех промахов, одного, двух и трех попаданий, а также вероятность хотя бы одного попадания в цель.

Решение.

Для решения задачи используем следующие обозначения событий: A_i — попадание в цель при i-м выстреле ($i = 1, 2, 3$); B_i — получение ровно j попаданий ($j = 0, 1, 2, 3$); B — получение хотя бы одного попадания.

Определяем вероятности возможных исходов испытания.

1. В соответствии с известным соотношением

$$P(B_0) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3),$$

а поскольку события A_1, A_2, A_3 в совокупности независимы, то

$$P(B_0) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3).$$

Используя равенство (1.18) получаем

$$P(B_0) = [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)] = \\ = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504. \tag{1.19}$$

2. Далее рассчитываем

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

Но события $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ несовместны, поэтому

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3),$$

а так как события $A_1, A_2, A_3, \overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ независимы в совокупности, то

$$P(B_1) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + \\ + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$$

или с учетом равенства (1.18)

$$P(B_1) = P(A_1)P[1 - P(A_2)][1 - P(A_3)] + \\ + [1 - P(A_1)]P(A_2)[1 - P(A_3)] + \\ + [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)]P(A_3). \tag{1.20}$$

Таким образом

$$P(B_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}398.$$

3. Аналогично получаем

$$P(B_2) = P(A_1)P(A_2)\,[1 - P(A_3)] + \\ + P(A_1)P[1 - P(A_2)]P(A_3) + \\ + [1 - P(A_1)]P(A_2)P(A_3), \tag{1.21}$$

так что

$$P(B_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}092.$$

4. С учетом независимости событий A_1, A_2, A_3 в совокупности имеем

$$P(B_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \tag{1.22}$$

и, следовательно,

$$P(B_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006.$$

5. Принимая во внимание, что события B_0, B_1, B_2, B_3 несовместны и составляют полную группу, проверим правильность произведенных вычислений сложением их вероятностей:

$$0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1.$$

Следовательно, вычисления произведены правильно.

6. Вероятность события B (хотя бы одного попадания в цель) вычислим всеми возможными способами:

а) принимая во внимание, что события A_1, A_2, A_3 совместны и независимы, по (1.13) находим:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ &- P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) = \\ &= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 - 0{,}1 \cdot 0{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 + \\ &+ 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}496; \end{aligned}$$

б) принимая во внимание, что события B_1, B_2, B_3 несовместны, по формуле (1.15) получаем:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \\ &= 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 0{,}496; \end{aligned}$$

в) из соотношения (1.18) имеем

$$P(B) = 1 - P(B_0) = 1 - 0{,}504 = 0{,}496.$$

Нетрудно увидеть, что последний способ в вычислительном отношении является наиболее рациональным.

В задачах, подобных рассмотренной, при большом числе испытаний и исходов отыскание необходимых соотношений между событиями существенно упрощается при использовании соответствующего графа (дерева) событий. Применительно к задаче примера 1.3 такой граф представлен на рис. 1.9.

Использование графа (дерева) событий позволяет не только упростить процесс отыскания вероятностей интересующих событий, но и проводить проверку правильности расчетов. При этом используется свойство графа, состоящее в том, что сумма вероятностей исходов на каждом уровне графа равна единице.